2001年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

議員定数配分方法とスケジューリング問題

1002750　政策研究大学院大学政策研究科　大山 達雄

1. 議員定数配分方法

対象とする選挙区の集合を $N=\{1,2,\cdots,n\}$ とするとき、各選挙区 $i\in N$ の人口が p_i(人)、総議員定数が K(人) と与えられているとする。このとき選挙区 i に割り当てられる議員定数 q_i は、理論的かつ理想的には、総人口を $P=\sum_{i\in N}p_i$ とすると $q_i=\frac{p_iK}{P}, i\in N$ のように与えられる。q_i は選挙区 i の厳密な議員定数割当分に相当するが、これを選挙区 i の理想議員定数と呼ぶ。選挙区 i の議員定数を d_i と表すと、d_i は以下の条件を満たさなければならない。

$$(1)\qquad \sum_{i\in N}d_i=K\ \ d_i>0:\text{整数},\ i\in N$$

したがって議員定数配分問題は、制約条件 (1) を満たすような d_i の中で、"理想議員定数 q_i にできるだけ近いもの"を求めることになる。式 (1) で与えられる理想議員定数 q_i がすべて整数ならば、$d_i=q_i$ とすればよいが、一般には q_i は整数とはならない。したがって d_i が"q_i にできるだけ近く"ということ、すなわち"公平"の基準を明確にすることが必要とされる。いま関数 $f(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ は各選挙区の間の"不公平さ"、"格差"を表す評価基準関数とし、各選挙区の理想議員定数 q_i、人口 p_i、総人口 P、総議員定数 K 等を用いて、変数 $d_1,d_2,\cdots,d_n$ の関数として表現されているものとする。このとき議員定数配分問題は (2) の制約条件の下で

$$(2)\qquad \text{Minimize}\ \ f(d_1,d_2,\cdots,d_n)$$

を達成する最適な議員定数 $d_i, i\in N$ を求める最適化問題であるということができる。

議員定数配分方法として最も一般的あるいは代表的なのが最大剰余数法である。最大剰余数法は1791年にA. Hamiltonによって提起されたことからハミルトン法とも呼ばれているが、最初にすべての選挙区 $i\in N=\{1,2,\ldots,n\}$ にそれぞれ定数 $\lfloor q_i\rfloor$(q_i を越えない最大整数) を与え、次に $q_i-\lfloor q_i\rfloor, i\in N$ を大きい順に並べ、上位から $K-\sum_{i\in N}\lfloor q_i\rfloor$ 個の選挙区に議員定数1を追加するという方法である。

一方、議員定数1がどれだけの人口を"代表"すべきかという量 (除数と呼ぶ) に基いて各選挙区の議員定数を決定する方法が除数法である。除数法では、まず除数関数 $v(d)$, ただし $d\le v(d)\le d+1$, を与え、人口 p を除数関数 $v(d)$ で除して得られる階数関数を $r(p,d)=\frac{p}{v(d)}$ のように定める。総議員定数が k のときの政党 i の配分議員定数を $d(k,i)$ と表すと、$d(K,i), i\in N$ を決定する手順は、以下のように書くことができる。

<u>除数法の計算手順</u>

<u>Step 1.</u> $d(k,i)=0,\ k\in\{0,1,\ldots,K\},\ i\in N.\quad k=0.$

<u>Step 2.</u> $r(p_t,d_t)=\max_{i\in N}r(p_i,d_i)$ なる t を求める。

$$\begin{cases} d(k+1,t) &= d(k,t)+1 \\ d(k+1,i) &= d(k,i) \qquad i\ne t,\ i\in N \end{cases}$$

<u>Step 3.</u> $k+1\to k$. もし $k=K$ ならば、終了。そうでなければ、Step 2 へ行く。

上のアルゴリズムは、Step 2の手続きからもわかるように、除数関数がたとえば選挙区の現在の配分議員定数を表す場合には、議員一人当たりの人口の最も多い政党に次の議員定数を配分する操作を繰り返すことを意味している。諸外国でよく用いられている最も代表的な除数法を除数関数とともに表1に示す。さらに表1には最大剰余数法を含めてそれぞれの配分方法がどのような評価基準を最適化するかを示す。

2. スケジューリング問題への応用

Miltenburg['89] で扱われている混合型製造ラインにおけるスケジューリング問題を考える。混合型製造ラインとは、一つの製造ライン上で、異なる種類の製品を製造することのできるラインである。製造ラインでは、全工程で部品を製造し、最終工程で前工程の部品を用いて完成品を組み立てる。製品 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ の需要量を $d_1,d_2,...,d_n$、そして需要量の総和を D_T とする。総需要に対する各製品 A_i の需要割合 r_i は、$r_i=\frac{d_i}{D_T}$, $i\in N=\{1,2,\ldots,n\}$ のように与えられる。

各時刻に各過程で製造される製品の割合が、この需要割合 r_i にできるだけ近くなるように混合型製造ラインのスケジュールを決定する問題を示そう。時刻 1 から時刻 k までの製品 i の総生産量 (個数) を x_{ik}, $i\in N$, $k=1,2,\ldots,D_T$ と表すと、製造に関する制約条件が次

表 1: 定数配分方法の除数関数と評価基準

配分方法	除数関数	評価基準
最大除数法	$d+1$	$\min \max_i \frac{d_i}{p_i}$
過半小数法	$d+\frac{1}{2}$	$\min \sum_{i\in N} \lvert\frac{d_i}{p_i}-\frac{K}{P}\rvert$ $\min \sum_{i\in N} p_i(\frac{d_i}{p_i}-\frac{K}{P})^2$
等比率法	$\sqrt{d(d+1)}$	$\min \sum_{i\in N} d_i(\frac{p_i}{d_i}-\frac{P}{K})^2$
調和平均法	$\frac{d(d+1)}{d+\frac{1}{2}}$	$\min \sum_{i\in N} \lvert\frac{p_i}{d_i}-\frac{P}{K}\rvert$
最小除数法	d	$\min \max_i \frac{p_i}{d_i}$
最大剰余数法	—	$\min \sum_{i\in N} \lvert d_i-q_i\rvert$ $\min \sum_{i\in N}(d_i-q_i)^2$ $\min \max_i \lvert d_i-q_i\rvert$

式のように与えられる。

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ik} = k \quad \text{for all } k$$

スケジュール決定問題の評価基準としては、以下のようなものが考えられるが、たとえば

$$\text{(3)} \qquad \min \sum_{k=1}^{D_T}\sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-kr_i)^2,$$

を最適化するには、それぞれの k について

$$\text{(4)} \qquad \sum_{i=1}^{n}(x_{ik}-kr_i)^2$$

を最小にすればよい。したがって議員定数配分方法としての最大剰余数法が最適解を与えることになるが、議員定数配分問題でいう"アラバマパラドクス"が生じるため、製造スケジュールとしては実行不可能となる場合がある。アラバマパラドクスが生じないという意味で常に実行可能なスケジュールを与える除数法を用いてスケジュールを決定することは可能である。

3. 一般化混合型製造ラインスケジューリング問題

製品、組立ライン、半製品、原材料の４つの階層からなる生産システムを考える。集合、パラメタを次のように定義する。$I=\{1,2,3,4\}$: 階層集合、$I_1=\{2,3,4\}$: 製品を除く階層集合、$K_i=\{1,2,\ldots,n_i\}, i\in I$: 階層 i の要素集合。n_i : 階層 i の要素数, $i\in I$、d_j : 製品 j の需要量, $j\in K_1$、c_{ijk} : 階層 i において単位量の製品 j を生産するのに必要な要素 k の量, $i\in I_1, j\in K_1, k\in K_i$、ここで c_{ijk} については、$j=k$ のときに $c_{ijk}=1$, それ以外のときに $c_{ijk}=0$ と定める。さらに: 階層 i における要素 k の需要量 d_{ik}、階層 i における製品の総需要量 D_i、そして階層 i における要素 k の需要量の製品総需要量に対する割合 r_{ik} を以下のように表す。

$$d_{ik}=\sum_{j=1}^{n_1} c_{ijk}d_j \quad i\in I_1, k\in K_i$$

$$D_i=\sum_{k=1}^{n_i} d_{ik} \quad i\in I; \ r_{ik}=\frac{d_{ik}}{D_i}$$

階層 1 における製品総需要量に対して集合 $T=\{1,2,\ldots,D_1\}$ を定め、期の集合と呼ぶことにする。ここで製品 j の期 t における生産量を z_{jt} と表すと、階層 i における要素 k の期 t に対する製品生産量 x_{ikt} あるいは階層 i に対する期 t の製品生産量 y_{it} は次式のように与えられる。

$$x_{ikt}=\sum_{j=1}^{n_1} c_{ijk}z_{jt} \quad i\in I_1, k\in K_i, t\in T$$

$$y_{it}=\sum_{k=1}^{n_i} x_{ikt} \quad i\in I_1, t\in T$$

以上の表記に基づいて、それぞれの階層における１期当たり生産量ができるだけ均一となるような生産システム最適化スケジュールを求める数理計画モデルの定式化の例を示そう。階層 i における要素 k の期 t に対する製品生産量を x_{ikt} とする。

$$\begin{aligned}
\text{(5) Min} \quad & \textstyle\sum_{i\in I_1}\sum_{k\in K_i}\sum_{t\in T} w_i(x_{ikt}-r_{ik}y_{it})^2 \\
\text{s.t.} \quad & y_{1t}=1 \quad t\in T \\
& 0\le x_{1kt}-x_{1kt-1}\le 1 \\
& x_{1kt}: \text{整数}, i\in I_1,\ t\in T
\end{aligned}$$

4. おわりに

３節に提示した数理計画モデルについては、評価基準に相当する目的関数に関して、それぞれの階層における１期当たり生産量ができるだけ均一となることを目指す各種数多くの形が考えられる。それらの関数形によってはさらに前節に紹介した議員定数配分方法が活用される可能性は多分に存在するといえる。

参考文献

Miltenburg, J., 1989. *Man. Sci.*, 35-2, pp.192-207.
Miltenburg, J. & Sinnamon, G., 1989. *Int. J. Prod. Res.*, 27-9, pp.1487-1509.