

高信頼度を要求されるシステムに対する最適点検・保全方策

三菱重工業株式会社 伊藤弘道[†]

1 はじめに

航空機や宇宙機器などのシステムは、大規模かつ複雑な構造を持ち、一般に極めて過酷な環境下で運用されるにもかかわらず、その運用に当たっては高い信頼性が要求されるという点で、一般の民生機器と異なっている。メーカーは、こうした高信頼度を要求されるシステムを生産するために、開発に当たり高度な信頼性設計と、製造に当たり徹底した品質管理を実施する。例えば飛しょう体は、客先納入後実際に運用に供されるまで長期間貯蔵庫に保管された状態に置かれるが、いざ運用する時には確実に任務を達成することが要求される。図1に飛しょう体の代表的な運用図を示す。客先に納入された飛しょう体は、各運用地に輸送された後、発射台に搭載されたり定期的に点検を受けることはあるが、その運用期間のほとんどの時間を貯蔵庫に保管された状態で過ごす。そのため、飛しょう体は”休眠システム(dormant system)”と称されることもある。しかし、たとえ貯蔵状態であっても、電子・電気部品の経年劣化によりシステムの信頼度は時間とともに低下することが報告されており、更に貯蔵中の飛しょう体の電子・電気部品に関する実績故障率データも報告されている[4, 6]。従って、もし貯蔵状態のまま放置したとすれば、いざ飛しょう体を運用しようとするときに、大多数が運用出来ない状態になってしまう可能性がある。このような事態を避けるために、運用者側にて貯蔵状態の飛しょう体に対して定期的に機能点検を実施し、異常を発見したならば保全を行って、高信頼度を維持してゆく必要がある。

点検・保全を客先での運用費用を最小にするように実施する、いわゆる最適点検方策については、BarlowとProschanをはじめとして、既に数多くの検討がなされている[1]。しかし、航空・宇宙機器の中には独特な運用形態や特殊な構造を持つものがあり、これら既存の手法が適用出来ないケースも存在する。例えば従来の検討では、点検によってシステムが正常か異常かが明確に確認出来ると仮定していた。しかし飛しょう体は発射後の飛しょう環境条件が極めて過酷であるために、地上での静止状態での機能試験では正常と判定されながら、発射後の飛しょう環境で不具合が発生する場合がある。

本稿では、高信頼度を要求されるシステムの例として運用のほとんどの期間を”貯蔵品”として過ごす飛しょう体を取り上げ、3種類の最適点検・保全方策について説明する。まず最初に、基本となるケースについて説明する。次に、拡張したケースとして、点検により貯蔵品が劣化するケースについて説明する。最後に、有限回数点検したならば、貯蔵品内部の部品を交換するケースについて説明する。

2 基本ケース

ここでは最初のケースとして、最も基本的な貯蔵品の点検・保全方策について説明する[8]。

[†]三菱重工業株式会社 名古屋誘導推進システム製作所 エンジン・機器部 システム製品課
〒485-8561 愛知県小牧市東田中1200番地 E-mail:Kodo.Ito@e-mail.ngpsw.mhi.co.jp

2.1 解析

貯蔵品に対し、以下のような点検・保全を実施するものとする。

- 1) 貯蔵品は時刻0では新品であり、時刻 NT ($N = 1, 2, \dots$) で点検され、必要に応じて保全されるものとする。ここで点検間隔 T は一定であり、事前に設定されるものとする。
- 2) 時刻 t における貯蔵品の故障時間は、分布関数 $F(t)$ に従うものとする。貯蔵品の信頼度は、予め設定された要求値 q 以上でなければならないものとする。今、時刻 NT から $(N+1)T$ の間に貯蔵品の信頼度が q 以下になるものとする。

$$\bar{F}(NT) \geq q > \bar{F}[(N+1)T] \quad (1)$$

更に、貯蔵品の信頼度は時刻 $NT + t_0$ にて q になるものとする。

$$\bar{F}(NT + t_0) = q \quad (2)$$

- 3) 貯蔵品は、大きく2種類の部分、ユニット1と2に区分されるものとする。ユニット1は点検により内部の故障が全て検出され、保全によって除去されるのに対し、ユニット2は点検により内部の故障が検出されることなく、従って故障した部分があっても保全されないものとする。
- 4) 時刻 t における貯蔵品の累積ハザード関数を $H(t)$ 、ユニット i ($i = 1, 2$) の累積ハザード関数を $H_i(t)$ とすると、貯蔵品の累積ハザード関数は $H(t) = H_1(t) + H_2(t)$ と示されるものとする。

以上より、貯蔵品の信頼度 $\bar{F}(t)$ は、

$$\bar{F}(t) = e^{-H_1(t) - H_2(t)} \quad (3)$$

で与えられる。時刻 NT にて点検・保全を行うとき、ユニット1は新品同様になるため、点検前後の信頼度は各々

$$\bar{F}(NT_{-0}) = e^{-H_1(T) - H_2(NT)} \quad (4)$$

$$\bar{F}(NT_{+0}) = e^{-H_2(NT)} \quad (5)$$

となる。従って、(1)式及び(2)式は、下記のように書き換えられる。

$$H_1(T) + H_2(NT) \leq \ln \frac{1}{q} < H_1(T) + H_2[(N+1)T] \quad (6)$$

$$H_1(t_0) + H_2(NT + t_0) = \ln \frac{1}{q} \quad (7)$$

単位時間当たりの期待費用は、

$$\frac{1 \text{ サイクル当たりの期待費用}}{1 \text{ サイクル当たりの期待時間}} \quad (8)$$

で与えられる[5]。時刻0から $NT + t_0$ までを1サイクルとし、費用として点検・保全費用 c_1 、オーバーホール費用 c_2 を導入すると、単位時間当たりの期待費用

$$C(T) = \frac{Nc_1 + c_2}{NT + t_0} \quad (9)$$

を得る。

2.2 最適点検方策

貯蔵品の信頼度関数として、実務上広く用いられている指数分布を用い、費用 $C(T)$ を最小にする最適点検時間 T^* を求める。ユニット1と2のハザード関数を $H_i(T) = \lambda_i T$ ($i = 1, 2$)とおくと、(6)式と(7)式は各々、以下のように書き換えられる。

$$\frac{1}{\lambda_2 T} \ln \frac{1}{q} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \leq N < \frac{1}{\lambda_2 T} \ln \frac{1}{q} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (10)$$

$$t_0 = \frac{\ln \frac{1}{q} - N \lambda_2 T}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (11)$$

以上より、最適点検間隔 T^* は、下記手順にて求めることが出来る。

手順1: 任意の T について(10)式より N 、(11)式より t_0 を計算する。

手順2: T 、 N 、及び t_0 より $C(T)$ を計算する。

手順3: T を $0 < T \leq 1/\lambda_1 \ln(1/q)$ の範囲で変化させ、 $C(T)$ を最小にする T^* を探索する。

3 点検による劣化を考慮した点検方策

コイルやモータ等インダクション部品を含んだ電気回路は、電源オン・オフの際に大電流が流れることは知られている。貯蔵品は様々な種類の電気・電子部品で構成されており、その中には電源オン・オフサイクルにより発生する大電流によって劣化するものも存在することが知られている [2]。ここでは、点検による電源オン・オフサイクルによる劣化を考慮した最適点検方策について説明する [3]。

3.1 解析

2.1項の点検方策の1)-3)を用い、4)の代わりに下記を用いる。

4) ユニット1のハザード関数を h_1 とすると、時刻 NT で新品になることから時刻 t ($NT < t \leq (N+1)T$)では $h_1(t - NT)$ になる。

5) ユニット2のハザード関数は h_2 と h_3 より構成されるものとする。ここで、 h_2 は時間による劣化を示し点検により変化しないものとし、 h_3 は点検による劣化を示すものとする。ユニット2は点検時の電源オン・オフサイクルにより劣化し、 h_3 はオン・オフサイクルにより点検一回当たり一定の割合 λ_3 で増加するものとし、時刻 t ($NT < t \leq (N+1)T$)で $h_3(t) = N\lambda_3$ と示されるとする [2, 7]。

6) 時刻 t ($NT < t \leq (N+1)T$)での貯蔵品のハザード関数 $h(t)$ は、上記より次式にて与えられる。

$$h(t) \equiv h_1(t - NT) + h_2(t) + N\lambda_3 \quad (12)$$

以上の設定より、時刻 t ($NT < t \leq (N+1)T$)での貯蔵品の累積ハザード関数 $H(t)$ は、(12)式より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv \int_0^t h(u) du \\ &= NH_1(T) + H_1(t - NT) + H_2(t) + \sum_{j=0}^{N-1} j\lambda_3 T + N\lambda_3(t - NT) \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、 $H_i(t) \equiv \int_0^t h_i(u)du$ である。従って、時刻 t での貯蔵品の信頼度 $\bar{F}(t)$ は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\bar{F}(t) &= e^{-H(t)} \\ &= \exp \left\{ -NH_1(T) - H_1(t - NT) - H_2(t) - N\lambda_3 \left[t - \frac{1}{2}(N+1)T \right] \right\}\end{aligned}\quad (14)$$

(14)式より(1)式と(2)式は各々次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned}NH_1(T) + H_2(NT) + \frac{1}{2}N(N-1)\lambda_3T \\ \leq q < (N+1)H_1(T) + H_2[(N+1)T] + \frac{1}{2}N(N+1)\lambda_3T\end{aligned}\quad (15)$$

$$NH_1(T) + H_1(t_0) + H_2(NT + t_0) + N\lambda_3 \left[\frac{1}{2}(N-1)T + t_0 \right] = \ln \frac{1}{q}\quad (16)$$

2項で導入した費用 c_1 と c_2 を用い、(9)式で与えられる単位時間当たりの期待費用を用いる。

3.2 最適点検方策

2項と同様に、信頼度関数として指数分布を用い、 $H_i(t) = \lambda_i t$ ($i = 1, 2$) とすると、(15)式と(16)式は各々以下のように書換えられる。

$$\begin{aligned}-\frac{2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3}{2\lambda_3} + \sqrt{\left[\frac{2(\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_3}{2\lambda_3} \right]^2 + \frac{2}{\lambda_3 T} \left[\ln \frac{1}{q} - (\lambda_1 + \lambda_2)T \right]} \\ < N \leq -\frac{2(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_3}{2\lambda_3} + \sqrt{\left[\frac{2(\lambda_1 + \lambda_2) - \lambda_3}{2\lambda_3} \right]^2 + \frac{2}{\lambda_3 T} \ln \frac{1}{q}}\end{aligned}\quad (17)$$

$$t_0 = \frac{\ln \frac{1}{q} - [\lambda_1 + \lambda_2 + \frac{1}{2}(N-1)\lambda_3] NT}{\lambda_1 + \lambda_2 + N\lambda_3}\quad (18)$$

最適点検間隔 T^* は、(10)式と(11)式の代わりに(17)式と(18)式を用いて、2.2項と同様な手順により求めることができる。

4 点検回数が有限の場合の点検方策

貯蔵品には、様々な電気・電子部品が使用されている。限られた機体スペースにコンパクトに収納された状態で大出力を要求されることから、それらの中には極めて作動寿命の短い部品も存在する。例えば、高い機動性を要求される翼を操舵するサーボモータ部分は、数十秒から数十分間の飛しょうを一度だけ達成すればよく、一般の航空機のように繰り返し運用する必要がないため、作動寿命は友人航空機のサーボモータよりもはるかに短い。こうした部品は、一定の作動時間の後には品質保証が切れるために交換しなければならない。しかし、これらの部品は、実運用ばかりではなく、点検においても短時間ではあるが作動させる。従って、定期点検による累積作動時間が規定値を越えたならば、正常であっても交換しなければならない。ここでは、一定回数の定期点検を実施したならば、交換を必要とする部品が内在する貯蔵品の最適点検方策について述べる[9]。

4.1 解析

2項の点検方策のうち3)、及び3項の4-1)を用いるものとし、2項の1)、2)の代わりに下記を用いる。

1-1) 貯蔵品は時刻0では新品であり、時刻 jT ($j = 1, 2, \dots, N$)で点検され、必要に応じて保全されるものとする。 N 回目の点検にて貯蔵品内部部品の保証期間が切れ、交換するとする。ここで点検間隔 T は一定であり、事前に設定されるものとする。

2-1) 時刻 t における貯蔵品の故障時間は、分布関数 $F(t)$ に従うものとする。

5-1) ユニット2のハザード関数を h_2 とし、時間による劣化を示し点検により変化しないものとする。

6-1) 時刻 t ($(j-1)T < t \leq jT$ ($j = 1, 2, \dots, N$))での貯蔵品のハザード関数 $h(t)$ は、2.2項の4-1)と上記5-1)より次式にて与えられる。

$$h(t) \equiv h_1(t - NT) + h_2(t) \quad (19)$$

これよりシステムの累積ハザード関数は、

$$\begin{aligned} H(t) &\equiv \int_0^t h(u) du \\ &= (j-1)H_1(T) + H_1(t - (j-1)T) + H_2(t) \end{aligned} \quad (20)$$

となる。これより貯蔵品の信頼度 $\bar{F}(t)$ は、 $\bar{F}(t) = \exp[-H(t)]$ で与えられる。

貯蔵品が保全またはオーバーホールされるまでの期待費用を求めると、

(a) c_1 を点検費用、 c_3 を故障による時間損失費用、 c_4 を部品交換費用とすると、時刻 jT の点検にて故障が検出され、システムを保全するときの期待費用は次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^N \int_{(j-1)T}^{jT} [jc_1 + (jT - t)c_3 + c_4] dF(t) \quad (21)$$

(b) 時刻 NT まで故障が発生せず、保証期間が切れて部品交換を行うときの期待費用は次式で与えられる。

$$\bar{F}(NT)(Nc_1 + c_4) \quad (22)$$

ここで $F \equiv 1 - \bar{F}$ である。

従って、全期待費用は、(21)式と(22)式を加えることによって、

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^N \int_{(j-1)T}^{jT} [jc_1 + (jT - t)c_3 + c_4] dF(t) + \bar{F}(NT)(Nc_1 + c_4) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (c_1 + c_3T) \bar{F}(jT) - c_3 \int_0^{NT} \bar{F}(t) dt + c_4 \end{aligned} \quad (23)$$

次に、貯蔵品を保全するまでの平均時間を求める。

(c) 時刻 jT の点検にて故障が検出され、貯蔵品を保全するまでの平均時間は次式で与えられる。

$$\sum_{j=1}^N \int_{(j-1)T}^{jT} jT dF(t) \quad (24)$$

(d) 時刻 jT まで故障が発生せず、保証期間が切れて貯蔵品を保全するまでの平均時間は次式で与えられる。

$$\bar{F}(NT)NT \quad (25)$$

従って、貯蔵品の修理・交換までの平均時間は、

$$\sum_{j=1}^N \int_{(j-1)T}^{jT} jT dF(t) + \bar{F}(NT)NT = \sum_{j=0}^{N-1} T\bar{F}(jT) \quad (26)$$

ある保全から次の保全までを1サイクルとすると、単位時間当たりの期待費用は(8)式より、

$$C_N(T) = \frac{c_1 \sum_{j=0}^{N-1} \bar{F}(jT) - c_3 \int_0^{NT} \bar{F}(t) dt + c_4}{T \sum_{j=0}^{N-1} \bar{F}(jT)} + c_3 \quad (27)$$

である。

4.2 最適点検方策

(27)式より、

$$\lim_{T \rightarrow 0} C_N(T) = \infty \quad (28)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} C_N(T) = c_3 \quad (29)$$

であることから、 $C_N(T)$ を最小にする T_N^* ($0 < T_N^* \leq \infty$)が存在する。

$C_N(T)$ を T で微分して0と置き、 $F(t)$ の密度関数を $f(t)$ とすると、次式を得る。

$$\frac{c_3 \int_0^{NT} t dF(t) - c_4}{\sum_{j=0}^{N-1} \bar{F}(jT)} - \frac{T \sum_{j=0}^{N-1} j f(jT) \left[c_3 \int_0^{NT} \bar{F}(t) dt - c_4 \right]}{\left[\sum_{j=0}^{N-1} \bar{F}(jT) \right]^2} = c_1 \quad (30)$$

信頼度関数が指数分布、即ち、 $H_i(t) = \lambda_i t$ ($i = 1, 2$)とすると、システムの信頼度関数は、 $\bar{F}(t) = \exp[-(\lambda_1 + \lambda_2)t]$ となる。簡単のため、 $\lambda \equiv \lambda_1 + \lambda_2$ と置くと、(27)及び(30)式は各々以下のように書き換えられる。

$$C_N(T) = \frac{c_1}{T} + c_3 - \frac{1}{\lambda T} (1 - e^{-\lambda T}) \left(c_3 - \frac{c_4 \lambda}{1 - e^{-N\lambda T}} \right) \quad (31)$$

$$\left(\frac{c_3}{\lambda} - \frac{c_4}{1 - e^{-N\lambda T}} \right) [1 - (1 + \lambda T)e^{-\lambda T}] - \frac{c_4 N \lambda T e^{-N\lambda T} (1 - e^{-\lambda T})}{(1 - e^{-N\lambda T})^2} = c_1 \quad (32)$$

(32)式の左辺を $Q_N(T)$ とおくと、 $Q_N(0) = -c_4/N$ 、 $Q_N(\infty) = c_3/\lambda - c_4$ であり、付録1から $Q_N(T)$ は T の単調増加関数である。従って、 $c_3/\lambda > c_1 + c_4$ ならば、(32)式を満たす有限な T^* ($0 < T^* < \infty$)が唯一存在する。

次に、 $c_3/\lambda > c_1 + c_4$ のとき、 N と T^* の関係を調べる。付録2より、 $Q_N(T)$ は N の単調増加関数であるから、 T^* の値は N が増加するにつれて減少する。また、(32)式より $N = 1$ のとき、

$$1 - (1 + \lambda T)e^{-\lambda T} = \frac{(c_1 + c_4)\lambda}{c_3} \quad (33)$$

$N = \infty$ のとき、

$$1 - (1 + \lambda T)e^{-\lambda T} = \frac{c_1 \lambda}{c_3 - c_4 \lambda} \quad (34)$$

ここで、(33)式と(34)式を満たす T^* の解をそれぞれ T_1^* と T_∞^* と置くと、

$$\frac{(c_1 + c_4)\lambda}{c_3} > \frac{c_1 \lambda}{c_3 - c_4 \lambda}$$

であるから、明らかに $T_{\infty}^* < T_N^* \leq T_1^*$ となることも判る。

なお条件 $c_3/\lambda > c_1 + c_4$ は、システム損失の全期待費用が点検と交換費用よりも大きいことを表しており、実際面において当然成立するものと考えられる。

定数 $N\lambda$ が小さいとき、 $e^{-N\lambda t} \simeq 1 - N\lambda t + (N\lambda t)^2/2$ なる近似を (32) 式に適用すると、 T^* は近似的に次式で与えられ、

$$T^* \simeq \frac{-2N(Nc_1 + c_4) + \sqrt{4(Nc_1 + c_4) \left[\frac{2Nc_3}{\lambda} - (N^2 + N - 2)c_4 \right]}}{-N^3c_1\lambda + 2Nc_3 - (2N^2 + N - 2)c_4\lambda} \quad (35)$$

最適値を推定するのに有効であろう。

信頼度関数が指数分布およびワイブル分布のとき、最適点検時間 T^* を決定するアルゴリズムのようになる。

手順1: $c_3/\lambda > c_1 + c_4$ なることを確認する。信頼度関数が指数分布の場合、この式が成立しているならば有限な T^* が唯一存在する。逆に $c_3/\lambda \leq c_1 + c_4$ ならば $T^* = \infty$ であり、点検しない方がよい。

手順2: (32) 式の非線形方程式を二分探索法や Newton-Raphson 法などにより数値的に解き、 T^* を求める。

手順3: (31) 式より、期待費用 $C_N(T^*)$ を計算する。

5 まとめ

ここでは、貯蔵品を例として、高信頼度を要求されるシステムに対する最適点検・保全方策について3種類説明した。まず最初に基本ケースを説明し、次にその拡張したケースとして、点検により貯蔵品が劣化するケースと、有限回数点検した後に貯蔵品内部の部品を交換するケースについて説明した。ここでは実務上最も広く利用されている指数分布を信頼度関数として用いたが、他の分布関数としてワイブル分布を適用することが可能である。

ここで示した点検・保全方策は、貯蔵品の運用に先立つ後方支援計画段階にて定期点検計画検討に用いたり、運用開始後にて信頼度実績値に基づく定期点検計画の見直しに用いることができる。

参考文献

- [1] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1965) *Mathematical Theory of Reliability*, John Wiley & Sons, New York.
- [2] Bauer, J., Cottrell, D.F., Gagnier, T.R. and Kimball, E.W. et al. (1973) *Dormancy and Power ON-OFF Cycling Effects on Electronic Equipment and Part Reliability*, (AD-768 619).
- [3] Ito, K., Nakagawa, T. "Optimal inspection policies for a storage system with degradation at periodic tests", accepted for publication in *Mathematical and Computer Modeling*.
- [4] Menke, J.T. (1983) *Deterioration of electronics in storage*, National SAMPE Symposium, pp.966-972.
- [5] Ross, S.M. (1970) *Applied Probability Models with Optimization Application*, Holden-Day, San Francisco.
- [6] Smith, H.B. Jr. and Rhodes, C. Jr. (1982) *Storage Reliability of Missile Material Program - Storage Reliability Prediction Handbook for Part Count Prediction*, (AD/A-122 439).

- [7] Trapp,R.D., Graber,R.D., Farmer,W.D. and Luhrs,R.A.(1981) *An Approach for Assessing Missile System Dormant Reliability*, (AD/A-107 519).
- [8] 伊藤弘道, 中川覃夫 (1994) 貯蔵品の最適点検方策, 日本信頼性学会誌, Vol.15, No.5, pp.3-7.
- [9] 伊藤弘道, 中川覃夫 (1997) 有限な点検回数をもつ貯蔵品の最適点検方策, 日本信頼性学会誌, Vol.19, No.6, pp.390-396.

付録

1. $Q_N(T)$ が T に関して単調増加の証明

$Q_N(T)$ の第一項は T に関する単調増加関数となることは自明であるから, 第二項について調べる. 第二項の $-Te^{-N\lambda T}(1 - e^{-\lambda T})/(1 - e^{-N\lambda T})^2$ を T で微分すると,

$$\frac{e^{-N\lambda T}}{(1 - e^{-N\lambda T})^3} [N\lambda T(1 - e^{-\lambda T})(1 + e^{-N\lambda T}) - (1 - e^{-N\lambda T})(1 - e^{-\lambda T} + \lambda T e^{-\lambda T})]$$

ここで, $e^{-N\lambda T}/(1 - e^{-N\lambda T})^3$ は正であるから,
 []内のみに着目し,

$$L_N(T) \equiv N\lambda T(1 - e^{-\lambda T})(1 + e^{-N\lambda T}) - (1 - e^{-N\lambda T})(1 - e^{-\lambda T} + \lambda T e^{-\lambda T})$$

とおく. 明らかに,

$$L_1(T) = (1 - e^{-\lambda T})(\lambda T - 1 + e^{-\lambda T}) > 0$$

更に,

$$\begin{aligned} L_{N+1}(T) - L_N(T) &= (1 - e^{-\lambda T}) \left[\lambda T (1 - N e^{-N\lambda T} + N e^{-(N+1)\lambda T}) - (1 - e^{-\lambda T}) e^{-N\lambda T} \right] \\ &> (1 - e^{-\lambda T})^2 \left[1 - (N+1) e^{-N\lambda T} + N e^{-(N+1)\lambda T} \right] \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから, $L_N(T)$ は N の増加関数である. 以上より, $L_N(T)$ は $1 \leq N < \infty$ の範囲で正であり, $Q_N(T)$ の第二項は T に関して単調増加関数であることが判る.

2. $Q_N(T)$ が N に関して単調増加の証明

$$Q_{N+1}(T) - Q_N(T) = c_4(1 - e^{-\lambda T})e^{-N\lambda T} \left\{ \frac{1 - (1 + \lambda T)e^{-\lambda T}}{(1 - e^{-N\lambda T})(1 - e^{-(N+1)\lambda T})} + \lambda T \left[\frac{N}{(1 - e^{-N\lambda T})^2} - \frac{(N+1)e^{-\lambda T}}{(1 - e^{-(N+1)\lambda T})^2} \right] \right\}$$

右辺の {} 内の第一項目が正であることは自明であるから, 第二項目の符号を考える.

$$\frac{N}{(1 - e^{-N\lambda T})^2} - \frac{(N+1)e^{-\lambda T}}{(1 - e^{-(N+1)\lambda T})^2} = \frac{N(1 - e^{-(N+1)\lambda T})^2 - (N+1)e^{-\lambda T}(1 - e^{-N\lambda T})^2}{(1 - e^{-N\lambda T})^2(1 - e^{-(N+1)\lambda T})^2}$$

であるから,

$$\begin{aligned} N(1 - e^{-(N+1)\lambda T})^2 - (N+1)e^{-\lambda T}(1 - e^{-N\lambda T})^2 \\ &= e^{-\lambda T} \left\{ N(e^{\lambda T} - 1)(1 - e^{-(2N+1)\lambda T}) - (1 - e^{-N\lambda T})^2 \right\} \\ &> 0 \end{aligned}$$

従って, $Q_{N+1}(T) - Q_N(T) > 0$ より, $Q_N(T)$ は N の単調増加関数であることが判る.

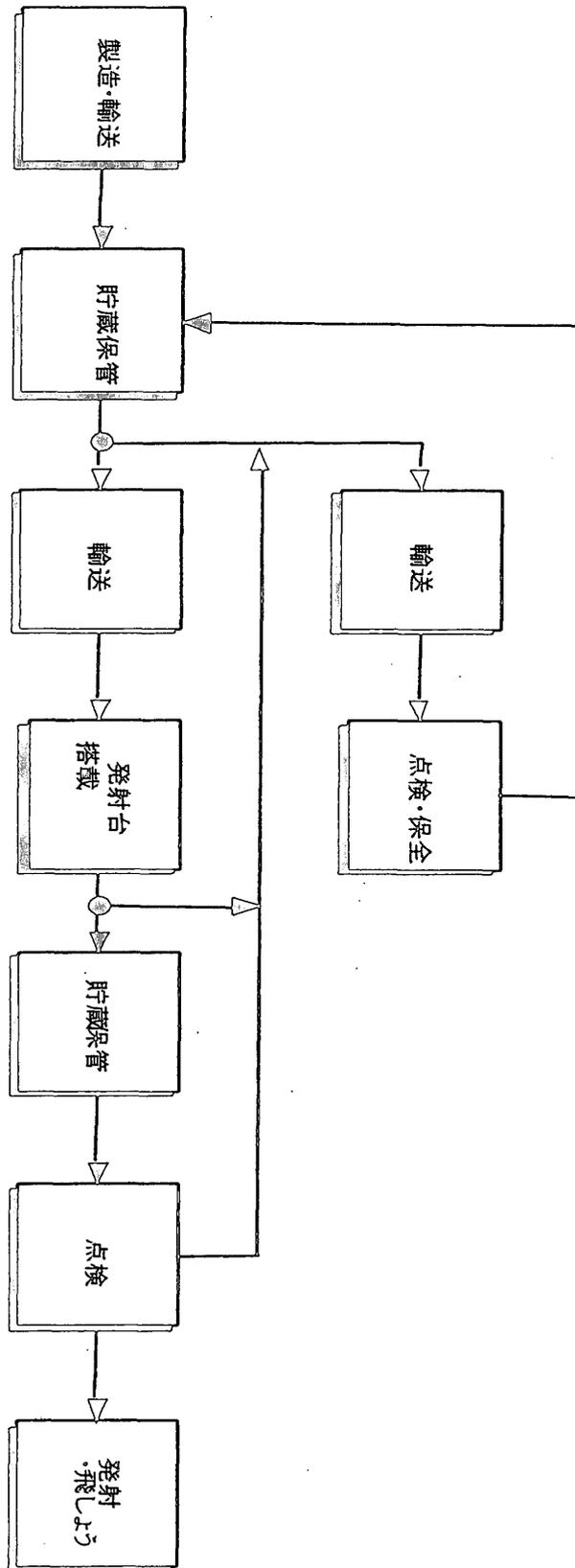


図1 飛しょう体の運用図[Bauer, et al. (1973)].