エントロピーを考慮したシステムの冗長度

01400043　愛知工業大学　*中川覃夫　NAKAGAWA Toshio
01701193　愛知工業大学　安井一民　YASUI Kazumi

1. まえがき

我々は文献 [1] において，システムの冗長度をそのシステムがもつパスの数と定義し，その信頼度をどのように表すかを考察した．また，いくつかの冗長システムの例題を与え，種々議論した．

2. システムの冗長度

二つのターミナルをもつシステムのパス (Path)[2] を Pa としたとき，システムの冗長度をエントロピー[3] を導入して，$Pe \equiv \log_2 Pa$ と定義する．

例１．直列システム

コンポーネント数 n をもつ直列システムのパスの数は $Pa = 1$ であるので，冗長度は $Pe = \log_2 1 = 0$ であり，n に無関係である．

例２．並列システム

コンポーネント数 n をもつ並列システムのパスの数は $Pa = n$ であるので，冗長度は $Pe = \log_2 n$.

表 1: 並列システムの冗長度

コンポーネント数 n	冗長度 $\log_2 n$
1	0
2	1
3	1.585
4	2
8	3
16	4

例3. ネットワークシステム

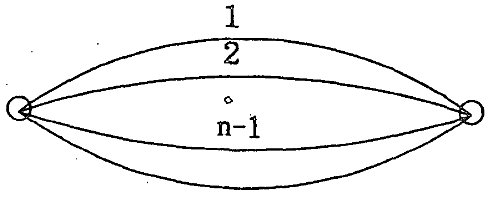

図１．ネットワークシステム

図１のように，二つのターミナルをもつ n 個のネットワークを考える．ネットワーク i $(i = 1, 2, \cdots, n)$ の各々の使用頻度(割合)を p_i, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ としたとき，このネットワークの冗長度を $Pe = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log_2 p_i$ と定義する．明らかに，$p_i = 1/n$ のとき，Pe は最大となり，並列システムの冗長度に等しくなる．

3. モジュールの冗長度

各モジュール(module)が，いくつかのコンポーネントから形成され，モジュール M_i $(i = 1, 2, \cdots)$ のパスの数を n_i, 冗長度を $Pe(i)$ とする．

例4. m 個の直列システム

パスの数は $\prod_{i=1}^{m} n_i$ であるから，冗長度は $Pe = \log_2(\prod_{i=1}^{m} n_i) = \sum_{i=1}^{m} \log_2 n_i = \sum_{i=1}^{m} Pe(i)$ となる．すなわち，直列システムの冗長度は各々のモジュールの冗長度の和で表わされる．

例5. m 個の並列システム

パスの数は $\sum_{i=1}^{m} n_i$ であるから，冗長度は $Pe = \log_2(\sum_{i=1}^{m} n_i)$ となる．とくに，$n_i = n$ のとき，$Pe = \log_2 n + \log_2 m$ となり，モジュールの冗長度とシステムの冗長度の和で表わされる．

4. 冗長度の信頼度

冗長度が $\log_2 n$ のとき，冗長度の信頼度をパラメータ $\alpha \geq 0$ に対して，

$$Re(n) \equiv e^{-\alpha \log_2 n} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

と定義する．明らかに，$Re(1) = 1$, $Re(\infty) = 0$ である．また，故障率は

$$\frac{Re(n) - Re(n+1)}{Re(n)} = 1 - e^{-\alpha[\log_2(n+1) - \log_2 n]},$$

で与えられ，$n = 1$ のとき $1 - e^{-\alpha}$, $n = \infty$ のとき 0 $(\alpha \neq 0)$ となる減少関数，すなわち，DFR となる．さらに，$\beta \equiv \alpha / \log_e 2$ とおくと，$Re(n) = n^{-\beta}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と書くこともできる．

例6. m 個の直列システム

m 個のモジュールからなる直列システムの冗長度の信頼度は，

$$Re(m) = e^{-\alpha \sum_{i=1}^{m} \log_2 n_i} = \prod_{i=1}^{m} Re(n_i),$$

となり，各々のモジュールの信頼度の積で表される．

例7. m 個の並列システム

m 個のモジュールからなる並列システムの冗長度の信頼度は，$Re(m) = exp[-\alpha \log_2(\sum_{i=1}^{m} n_i)]$ である．

5. 最適コンポーネント数

システムの信頼度を R, 冗長度の信頼度を Re としたとき，冗長度を考慮したシステムの信頼度を $Rs \equiv R \times Re$ と定義する．

例8. 多数決システム

多数決システムにおいて，Rs を最大にする最適コンポーネント数 n^* を求めることを考える．一つのコンポーネントの信頼度 R_0 をもつ多数決システム，すなわち，$(n+1)$-out-of-$(2n+1)$ システムの信頼度は，

$$R(n) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} R_0^k (1-R_0)^{2n+1-k}$$

$$(n = 1, 2, \cdots).$$

冗長度は $\log_2 \binom{2n+1}{n+1}$ であるから，その信頼度は，$Re(n) = exp[-\alpha \log_2 \binom{2n+1}{n+1}]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ である．したがって，冗長度を考慮したシステムの信頼度は，

$$Rs(n) = e^{-\alpha \log_2 \binom{2n+1}{n+1}}$$

$$\times \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} R_0^k (1-R_0)^{2n+1-k} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

となる．システムの信頼度 $Rs(n)$ を最大にする n^* を表2に与える．

表2: 多数決システムの最適数 n^*

	α					
R_0	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}
1-10^{-1}	2	3	6	8	10	13
1-10^{-2}	1	1	2	2	3	8
1-10^{-3}	1	1	1	1	2	2

例9. マルチシステムとデュプレックスシステム

マルチシステムの信頼度は，

$$Rs = e^{-2\alpha} \left[1 - (1 - R_0)^2\right]^2,$$

であり，デュプレックスシステムの信頼度は，

$$Rs = e^{-\alpha} \left[1 - (1 - R_0^2)^2\right],$$

となる．

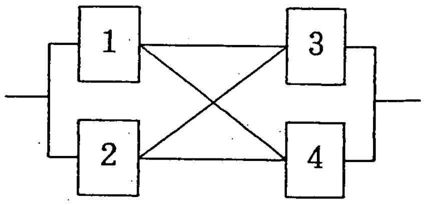

図2．マルチシステム

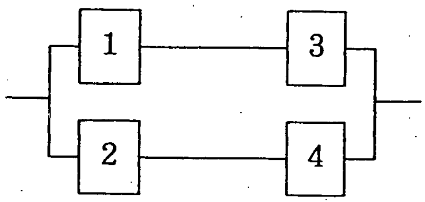

図3．デュプレックスシステム

いま，$q \equiv e^{-\alpha}$ とおき，二つのシステムの信頼度が等しいとおくと，$q^* = [2 - R_0^2]/[(2 - R_0)^2]$ となる．したがって，$q < q^*$ のとき，デュプレックスシステムの信頼度が，逆に，$q > q^*$ のとき，マルチシステムの信頼度が，それぞれ高くなることがわかる．表3に，R_0 を与えたとき，q^* と α の値を示す．

表3: マルチシステムとデュプレックスシステムの信頼度が等しくなる q^* と α

R_0	q^*	α
$1-10^{-1}$	0.983471	0.016667
$1-10^{-2}$	0.999804	0.000196
$1-10^{-3}$	0.999998	0.000002

参考文献

[1] 中川覃夫，安井一民，“システムの冗長性に関する信頼性的考察”，電子情報通信学会論文誌，Vol.J80-A, No.12, pp.2184-2186, 1997.

[2] R. E. Barlow and F. Proschan, “Mathematical Theory of Reliability”, John Wiley & Sons, New York, 1965.

[3] 国澤清典，“エントロピー・モデル”，日科技連，1975.