AHPウェイトベクトルの相対位置関係のシミュレーション研究

申請中　日本大学生産工学部　†　三宅　千香子
Nihon University　Miyake Chikako
01205220　日本大学生産工学部　篠原　正明
Nihon University　Shinohara Masaaki

1　はじめに

AHPの計算は、Focus/Criteriaノードにおける出力枝に関するウェイトベクトル推定法とFocusノードからAlternativeノードのパス重みの合成法で構成される。前者について、従来から幾何平均法(Geometric-mean:GM)、最小二乗法(Least Square:LS)、固有値法(Eigenvalue:EV)などが用いられているが、本実験では、筆者らが提案するエントロピー最適化背景モデルに基づいた新しいウェイトベクトル推定法である「エントロピー法(Entropy:ENT)」を加えてEV法、GM法、ENT法の新旧とりまぜた3つのウェイトベクトル推定法の性能をシミュレーション実験を通じて、比較評価する。

2　シミュレーション実験

2.1　概略

真のウェイトベクトル w^0 を仮定し、この真のウェイトベクトルから整合性を持つ一対比較行列 $A=\{a_{ij}\}$ を生成する。(但し、$a_{ij}=w_i^0/w_j^0$) $i,j=1,\cdots,n$)
そして、この A に適当な確率分布に基づく摂動を与える。さらに、摂動後の一対比較行列の母集団を M とする。母集団 M に属する l 番目の標本一対比較行列を $S(l)=\{s_{ij}(l)\}$ とすると、$s_{ij}(l)$ と a_{ij} は一般には、次式で関係づけられる。

$$s_{ij}(l)=f(a_{ij},r_{ij}(l)) \quad (1)$$

但し、$r_{ij}(l)$ は、l 番目の標本一対比較行列 $S(l)=\{s_{ij}(l)\}$ の (i,j) 要素 $s_{ij}(l)$ に付随した摂動のための確率乱数値であり、適当な確率分布に従う確率変数 R の実現値である。母集団 M に属する標本一対比較行列 $S(l)=\{s_{ij}(l)\}$ に対して、3つのウェイトベクトル推定法、GM法、EV法、ENT法を適用して、ウェイトベクトル $w^i(i=1,2,3)$ を計算する。ウェイトベクトル間の距離 D に基づき、GM法、EV法、ENT法の各ウェイトベクトル推定法で推定されるウェイトベクトル w^1, w^2, w^3 の相対位置関係ならびに真のウェイトベクトル w^0 への近接度合を評価する。

2.2　実験条件

☆ **対象となる次元数:n**
一対比較行列ならびにウェイトベクトルの次元数であり、Focusノードの場合は、Criterionの数で、Criterionノードの場合は代替案の数に相等する。本実験においては、$n=3,4,8,12$ について行う。

☆ **真のウェイトベクトル w^0 の仮定**
実験で用いる真のウェイトベクトル w^0 を次式

$$w^0=\frac{2}{n(n+1)}[n,n-1,\cdots,1]^T$$

で与える。

☆ **摂動の仕方**
確率変数 R は(平均0, 分散 σ_0^2)の正規分布にしたがう確率変数 X を用いて、$R=10**X$ の計算式により生成した. 標本一対比較行列 S の要素 s と整合一対比較行列 A の対応する要素 a を次式で関係付ける。

$$s=f(a,r)=a*r \quad (2)$$

但し、r は確率変数 R の実現値である。

☆ **データの収集法**
母集団から抽出した標本数を m とし, m 個の標本について平均した以下の指標を計算する。

$$\overline{d_{ij}}=\frac{1}{m}\textstyle\sum_{l=1}^{m}D(w^i(l),w^j(l)) \quad (i,j=0,1,2,3) \quad (3)$$

但し、i=0:真の値, i=1:GM法, i=2:EV法, i=3:ENT法である。

☆ **ウェイトベクトル間の距離関係**
次式のユークリッド距離(L_2-計量ノルム)を採用する。

$$D(w^i,w^j)=\Bigl(\sum_{k=1}^{n}(w_k^i-w_k^j)^2\Bigr)^{1/2} \quad (4)$$

2.3　実験結果と考察

2.3.1　ウェイトベクトル間の相対的位置関係

表1～表4に、$n=3,4,8,12$ の場合について、4つのウェイトベクトル間のユークリッド距離($m=4000$ 個の標本値の平均)を示すが、これより以下の事が判明する。

- n が小さい範囲($n=3,4$)ではGM法とEV法のウェイトベクトルは、ほとんど等しい。(但し、$n=3$ ではReciprocal行列に対して完全に等しいことが証明済)
- 真値とのユークリッド距離 $\overline{d_{0i}}(i=1,2,3)$ は n を固定した場合について元となる正規分布の標準偏差 σ_0 に正比例した値をとる。例えば、$n=4$ の場合には $\overline{d_{01}}=0.45\sigma_0$ となる(図1参照)。同様の傾向は $\overline{d_{13}}$, $\overline{d_{23}}$ にも成立するが, $\overline{d_{12}}$ には成立しない。

表 1: m=4000,n=3

—	$\sigma_0 = 0.2$	$\sigma_0 = 0.1$	$\sigma_0 = 0.01$
$\overline{d_{01}}$	0.105778	0.051639	0.005214
$\overline{d_{02}}$	0.105778	0.051639	0.005214
$\overline{d_{03}}$	0.109115	0.052416	0.005259
$\overline{d_{12}}$	0.000002	0.000000	0.000000
$\overline{d_{13}}$	0.015858	0.006807	0.000669
$\overline{d_{23}}$	0.015860	0.006807	0.000669

表 2: m=4000,n=4

—	$\sigma_0 = 0.2$	$\sigma_0 = 0.1$	$\sigma_0 = 0.01$
$\overline{d_{01}}$	0.089200	0.044928	0.004493
$\overline{d_{02}}$	0.089670	0.045031	0.004493
$\overline{d_{03}}$	0.094791	0.046503	0.004582
$\overline{d_{12}}$	0.008166	0.002123	0.000021
$\overline{d_{13}}$	0.022473	0.010117	0.000961
$\overline{d_{23}}$	0.023514	0.010314	0.000961

表 3: m=4000,n=8

—	$\sigma_0 = 0.2$	$\sigma_0 = 0.1$	$\sigma_0 = 0.01$
$\overline{d_{01}}$	0.055017	0.027647	0.002742
$\overline{d_{02}}$	0.056514	0.027765	0.002742
$\overline{d_{03}}$	0.065212	0.031012	0.003072
$\overline{d_{12}}$	0.011813	0.002864	0.000029
$\overline{d_{13}}$	0.029595	0.013077	0.001274
$\overline{d_{23}}$	0.029958	0.013175	0.001274

表 4: m=4000,n=12

—	$\sigma_0 = 0.2$	$\sigma_0 = 0.1$	$\sigma_0 = 0.01$
$\overline{d_{01}}$	0.039095	0.019377	0.001945
$\overline{d_{02}}$	0.040227	0.019532	0.001945
$\overline{d_{03}}$	0.049907	0.023383	0.002304
$\overline{d_{12}}$	0.009921	0.002407	0.000024
$\overline{d_{13}}$	0.028530	0.012618	0.001231
$\overline{d_{23}}$	0.028637	0.012659	0.001231

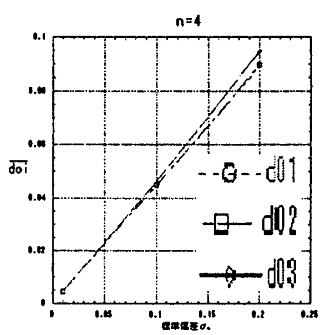

図 1: 真値との距離 $\overline{d_{0i}}$ と標準偏差 σ_0 の関係

- すべての n と σ_0 について、$\overline{d_{01}}$ が常に最小であり, 摂動要因である (2) 式の確率変数として対数正規分布を与えた場合には、GM 法によるウェイトベクトルが最も真値に近い。(理論上は LLS 法では対数正規分布型の誤差関数を仮定しており、この点がシミュレーション実験でも検証されたと言える)
- 6つの平均距離 $\overline{d_{01}}$, $\overline{d_{02}}$, $\overline{d_{03}}$, $\overline{d_{12}}$, $\overline{d_{13}}$, $\overline{d_{23}}$ から推定した4つのウェイトベクトル $\boldsymbol{w}^i (i = 0, 1, 2, 3)$ 間の相対的位置関係を $n = 12, \sigma_0 = 0.2$ の場合について $\boldsymbol{w}^1$, $\boldsymbol{w}^2$, $\boldsymbol{w}^3$ を平面上に置き図 2 に示す。

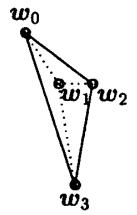

図 2: 相対関係位置の図示

3 おわりに

ウェイトベクトル推定法のシミュレーション実験の枠組みを確立し、3つのウェイトベクトル推定法の性能をシミュレーション実験により比較評価した. 本報告では (2) 式の確率変数として対数正規分布を与えた場合には幾何平均法によるウェイトベクトルが真値に最も近いことがシミュレーションにより検証できたが, [1] では摂動要因が一様分布にしたがう確率変数の場合にはエントロピー法が真値に最接近したウェイトベクトルを与えることがシミュレーションにより示されている. どのような確率分布の時に, いかなるウェイト推定法が真値に最接近したウェイトベクトルを与えるかという課題を研究する必要がある. 今後は、ウェイトベクトル推定法のみならず, AHP, ANP に関する技法上の各種の諸問題の比較評価のために包括的かつ集中的なシミュレーション実験を行う予定である. また, 本実験で用いたプログラムをベースとして, 各種のウェイトベクトル推定法の性能比較を行う評価ツールを構築する予定である.

参考文献

[1] 篠原正明, 「Entropy AHP and its comparison with conventional AHP's」, The Fifth International Symposium on The Analytic Hierarchy Process (ISAHP'99.), 165-170.

[2] 高橋磐郎, 「AHP から ANP への諸問題V」, オペレーションズリサーチ誌, **43**, (1998), 289-293.