

# 整合性の改善方法とその評価

01404360 日本大学 西澤一友 NISHIZAWA Kazutomo

## 1 はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) の整合性を改善するため、前回の報告では、一対比較行列の要素全体を修正し  $\lambda_{max}$  の値を  $n$  に収束させる方法を提案した [1]。この方法では  $CI = 0$  が得られ、さらにパワー法等により固有ベクトルを計算しなくても修正した行列の第 1 列が、 $w_1 = 1$  とした固有ベクトルとして得られる。本報告ではこの修正方法について評価を行う。

式 (4) は  $\lambda_{max} = 5.396$ 、 $CI = 0.099$  である。修正された一対比較行列  $A'_1$  は式 (5) である。

$$A'_1 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.601 & 0.430 & 0.332 & 0.289 \\ 1.661 & 1.000 & 0.715 & 0.552 & 0.481 \\ 2.320 & 1.396 & 1.000 & 0.771 & 0.672 \\ 3.008 & 1.810 & 1.296 & 1.000 & 0.871 \\ 3.453 & 2.078 & 1.488 & 1.147 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (5)$$

得られたウエイトを表 1 に示す。

表 1: 例 1 のウエイト

$i$	1	2	3	4	5
$w_i$	1	2	3	4	5
$w1_i$	1.000	1.628	2.442	2.739	3.136
$w1'_i$	1.000	1.661	2.320	3.008	3.453

## 2 一対比較行列の修正方法

整合性が良い場合、 $a_{ij} = w_i/w_j$  の関係が成り立っており、任意の  $k$  について次の関係が得られる。

$$a_{ij} = (w_i/w_k)/(w_j/w_k) = a_{ik}/a_{jk} = a_{kj}/a_{ki} \quad (1)$$

しかし実際には誤差があるので、次式のように計算し、

$$a'_{ijk} = a_{kj}/a_{ki} \quad (2)$$

さらに幾何平均により  $a'_{ij}$  を修正する。

$$a'_{ij} = \left( \prod_{k=1}^n a'_{ijk} \right)^{1/n} \quad (3)$$

そして  $\lambda_{max}$  が  $n$  に収束するまで繰り返す。

## 3 修正例

$n = 5$  とし、 $w_i = i, i = 1 \sim 5$  と設定し、 $a_{ij} = w_i/w_j$  より、 $\lambda_{max} = 5$ 、 $CI = 0$  の一対比較行列  $A_0$  を作る。そして、正規乱数により誤差  $e_{ij}$  を加えた一対比較行列を作り、式 (3) で提案した手法により修正してみる。

### 3.1 例 1 ( $CI$ の値が 0.1 に近い場合)

$A_1$  は  $A_0$  に  $\log e_{ij} \in N(0, 1^2)$  により誤差を加え作成した一対比較行列である。

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.377 & 0.893 & 0.269 & 0.274 \\ 2.646 & 1.000 & 0.280 & 0.718 & 0.592 \\ 1.119 & 3.565 & 1.000 & 0.738 & 0.570 \\ 3.711 & 1.391 & 1.354 & 1.000 & 0.879 \\ 3.642 & 1.688 & 1.753 & 1.136 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (4)$$

### 3.2 例 2 ( $CI$ の値が大きい場合)

$A_2$  は  $A_0$  に正規乱数  $N(0, 2^2)$  で誤差を加え作成した一対比較行列である。

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1.000 & 2.094 & 0.070 & 0.399 & 0.077 \\ 0.477 & 1.000 & 1.095 & 1.071 & 2.145 \\ 14.139 & 0.912 & 1.000 & 2.437 & 0.163 \\ 2.502 & 0.933 & 0.410 & 1.000 & 2.432 \\ 12.950 & 0.466 & 6.132 & 0.411 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式 (6) は  $\lambda_{max} = 8.040$ 、 $CI = 0.760$  であり、整合性は良くない。修正した一対比較行列  $A'_2$  は式 (7) である。

$$A'_2 = \begin{bmatrix} 1.000 & 0.328 & 0.245 & 0.287 & 0.197 \\ 3.048 & 1.000 & 0.748 & 0.876 & 0.601 \\ 4.074 & 1.336 & 1.000 & 1.170 & 0.804 \\ 3.479 & 1.141 & 0.854 & 1.000 & 0.687 \\ 5.063 & 1.661 & 1.242 & 1.455 & 1.000 \end{bmatrix} \quad (7)$$

得られたウエイトを表 2 に示す。

## 4 修正結果の評価方法

修正した結果が正解に近くなったかの評価を行う。最初、残差平方和  $RSS$  (Residual Sum of Squares) による

表 2: 例 2 のウエイト

$i$	1	2	3	4	5
$w_i$	1	2	3	4	5
$w2_i$	1.000	2.553	3.376	2.654	5.104
$w2'_i$	1.000	3.048	4.074	3.479	5.063

評価を行ったが、不合理な評価結果が含まれていたため、さらにAHPによる評価も行った。ここでは、正解である $A_0$ のウエイトを $w_i$ 、誤差を加えた $A_x$ のウエイトを $wx_i$ 、修正した $A'_x$ のウエイトを $wx'_i$ とする。

#### 4.1 RSSによる評価

RSSは次式によりを求め、値の小さいほうが正解に近いと評価する。

$$RSS(A_x) = \sum_{k=1}^n (w_k - wx_k)^2 \quad (8)$$

$$RSS(A'_x) = \sum_{k=1}^n (w_k - wx'_k)^2 \quad (9)$$

表1と表2より求めた結果を表3に示す。それによると、例2では修正前の方が正解に近い評価になっている。

表 3: RSS ( $w_1 = 1$ )

$A_1$	5.5078	$A_2$	2.2688
$A'_1$	3.9509	$A'_2$	2.5274

一方、通常はウエイトの総和を1として用いることが多いので、その場合のRSSを求めると表4となった。

表 4: RSS (ウエイト総和1)

$A_1$	0.0038	$A_2$	0.0101
$A'_1$	0.0016	$A'_2$	0.0087

表4では修正後の方が正解に近い結果となり、表3とは矛盾する。

#### 4.2 AHPによる評価

AHPによる評価では、評価基準は正解である $n$ 個の $A_0$ の固有ベクトル $w_i (i = 1 \sim n)$ である。そのウエイト

を $v_i$ とすると $v_i$ はそれぞれ同等であり、総和を1とすると $v_i = 1/n$ となる。代替案は誤差を加えた $A_x$ の固有ベクトルと修正した $A'_x$ の固有ベクトルである。 $A_x$ と $A'_x$ の各固有ベクトルのウエイトをそれぞれ $ex_i$ 、 $ex'_i$ とすると、次式のように正解との差の絶対値をとり、さらに各 $i$ について $ex_i + ex'_i = 1$ となるように正規化する。

$$ex_i = |w_i - wx_i| / (|w_i - wx_i| + |w_i - wx'_i|) \quad (10)$$

$$ex'_i = |w_i - wx'_i| / (|w_i - wx_i| + |w_i - wx'_i|) \quad (11)$$

$A_x$ と $A'_x$ の総合ウエイトは次式のようにして求められ、値の小さいほうが正解に近いと評価する。

$$AHP(A_x) = \sum_{k=1}^n (ex_k \times v_k) \quad (12)$$

$$AHP(A'_x) = \sum_{k=1}^n (ex'_k \times v_k) \quad (13)$$

例1と例2についてのAHPによる評価結果を表5に示す。例2では、 $w_1 = 1$ 、総和1両方とも修正しても正解に近づかない評価となっている。整合性が非常に良くない状況なのでしかたない結果かもしれない。

表 5: AHPによる評価

$w_1 = 1$	$A_1$	0.5160	$A_2$	0.4898
	$A'_1$	0.4839	$A'_2$	0.5102
総和1	$A_1$	0.6823	$A_2$	0.3896
	$A'_1$	0.3177	$A'_2$	0.6103

## 5 結論

提案した手法では、 $CI = 0$ が得られるとともに修正した行列の第1列が固有ベクトルとして得られる利点がある。修正例から判断すると、整合性の比較的良好な場合はさらに正解に近くなるが、整合性の良くない場合は必ずしも正解に近づくとはいえず、修正可能な範囲があるものと思われる。評価方法としてRSSとAHPを用いたが、RSSでは値が大きな時の誤差が強く影響する傾向があり、矛盾した評価結果となることがあった。

## 参考文献

- [1] 西澤一友：一対比較行列の反復修正、日本オペレーションズ・リサーチ学会1999年度春季研究発表会、(1999)、pp170-171.