円盤領域における線形人口分布の構造と平均距離の算出法

01107680 慶應義塾大学 栗田 治 KURITA Osamu

1. はじめに

半径$R(>0)$の円盤都市を考え，円盤の中心を原点とする極座標系(x,θ)で線形の人口分布

$$\rho(x,\theta)=a+bx \quad (0\le x\le R,\ 0\le\theta<2\pi) \tag{1}$$

を想定する．ρがθに依存しない設定から明らかなように，これは回転対称な人口分布である．ここでは$a\ge 0$かつ$a+bR\ge 0$(人口密度は区間$(0,R)$で非負)で，aとbがともにゼロであることはないものと約束しておく．(1)は(a,b,R)の値によって，図1の如くに5通りの人口分布形状を提供する．本研究は円盤上のあらゆる2点間の移動が人口密度に比例して発生するものとし，2点間の直線距離uの平均値$\bar{u}$を算出するための技術を提供し，その背後に在る構造に言及する．本研究の結果は，都市の移動に関わる規範的な数理モデルを作成してゆく上で有用なものと思われる．

2. 線形人口分布の構造

まず(1)に基づいてxの確率密度函数$f(x)$を計算しておく：

$$f(x)=\frac{6(ax+bx^2)}{R^2(3a+2bR)}. \tag{2}$$

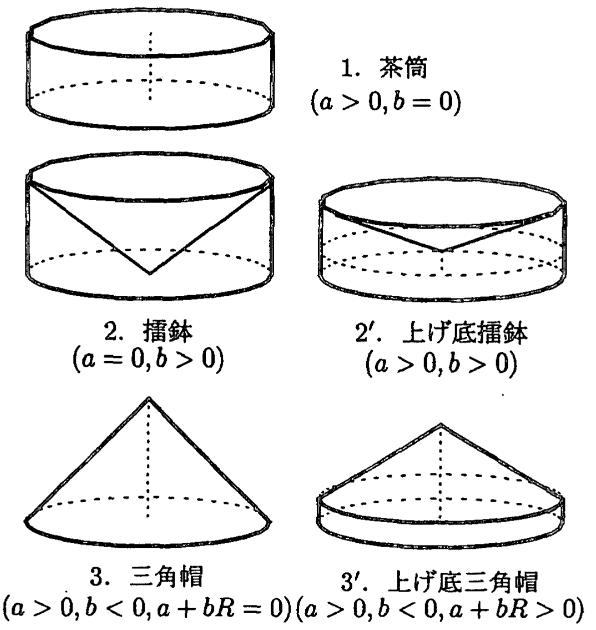

図1 線形人口分布の5つの類型.

ここで$b=0$(均一な茶筒型分布：図1−1)でのxの確率密度を$f_1(x)$とし，$a=0$(切片ゼロの擂鉢型分布：図1−2)でのxの確率密度を$f_2(x)$とし，$a+bR=0$(都市境界で密度ゼロの三角帽型分布：図1−3)でのxの確率密度を$f_3(x)$とすると，次の通りである：

$$f_1(x)=\frac{2x}{R^2};\quad f_2(x)=\frac{3x^2}{R^3};\quad f_3(x)=\frac{6x}{R^2}-\frac{6x^2}{R^3}. \tag{3}$$

3者の間には次の関係がある：

$$3f_1(x)=2f_2(x)+f_3(x). \tag{4}$$

また$f(x)$はこれら3者のうちの2つの要素の1次結合で表現できる．例として$f(x)$を$f_1(x)$と$f_2(x)$との1次結合

$$f(x)=\lambda f_1(x)+\mu f_2(x) \tag{5}$$

で表現するには

$$\lambda=\frac{3a}{3a+2bR},\quad \mu=\frac{2bR}{3a+2bR}. \tag{6}$$

とすればよい．

3. 平均距離の素朴な計算

$g(\theta)$をθの確率密度函数とするとき，同時密度$f(x)g(\theta)$をもつ独立な2点PとQの間の距離をuとし，その平均値を求めたい．このとき分布の対称性により，一方の点Pをある角度に固定してよい：

$$P=(x,0),\quad Q=(y,\theta). \tag{7}$$

さらにθが$[0,\pi]$の一様分布に従うとしても一般性は失われない：

$$g(\theta)=\frac{1}{\pi}\quad (0\le\theta\le\pi). \tag{8}$$

uは余弦定理によって

$$u(x,y;\theta)=\sqrt{x^2-2xy\cos\theta+y^2} \tag{9}$$

と表現される．

以上の設定の下で，(5)の関係を用いた平均距離$\bar{u}$の計算を行うと次式に帰着する：

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \int_0^R\int_0^R\int_0^\pi u(x,y;\theta)f(x)f(y)g(\theta)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\theta\\ &= \lambda^2\bar{u}_{11}+2\lambda\mu\bar{u}_{12}+\mu^2\bar{u}_{22}.\end{aligned} \tag{10}$$

ただし，上式の$\bar{u}_{ij}$の定義は次の通りである：

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{11} &= (\text{図1−1の茶筒型分布に従う2点間の平均距離}) \\
&= \int\!\!\int\!\!\int u f_1(x) f_1(y) g(\theta)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}\theta; \quad (11) \\
\bar{u}_{12} &= (\text{図1−1の茶筒型分布に従う点から図1−2の擂鉢型分布に従う点への平均距離}) \\
&= \int\!\!\int\!\!\int u f_1(x) f_2(y) g(\theta)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}\theta; \quad (12) \\
\bar{u}_{22} &= (\text{図1−2の擂鉢型分布に従う2点間の平均距離}) \\
&= \int\!\!\int\!\!\int u f_2(x) f_2(y) g(\theta)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}\theta \quad (13)
\end{aligned}$$

$\bar{u}_{11}$は次で与えられることが分かっている [1,2]：

$$\bar{u}_{11} = \frac{128}{45\pi} R \simeq 0.905415R. \qquad (14)$$

他方$\bar{u}_{12}$と$\bar{u}_{22}$についてはきれいな形では求められていないので数値積分を行った：

$$\bar{u}_{12} \simeq 0.952153R; \quad \bar{u}_{22} \simeq 0.993261R. \qquad (15)$$

同様に$\bar{u}_{13}$(茶筒↔三角帽平均距離)，$\bar{u}_{23}$(擂鉢↔三角帽平均距離)，$\bar{u}_{13}$(三角帽↔三角帽平均距離) については (4) に基づいて積分を定式化することによって次の通りに算出される：

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{13} &= 3\bar{u}_{11} - 2\bar{u}_{12} \simeq 0.811939R \quad (16) \\
\bar{u}_{23} &= 3\bar{u}_{12} - 2\bar{u}_{22} \simeq 0.869935R \quad (17) \\
\bar{u}_{33} &= 9\bar{u}_{11} - 12\bar{u}_{12} + 4\bar{u}_{22} \simeq 0.695948R. \quad (18)
\end{aligned}$$

既出の平均距離の間には次の大小関係がある：

$$\bar{u}_{33} < \bar{u}_{13} < \bar{u}_{23} < \bar{u}_{11} < \bar{u}_{12} < \bar{u}_{22}. \qquad (19)$$

他方，uの2乗の平均値$< u^2 >$は簡単に

$$\begin{aligned}
< u^2 > &= \int_0^R \int_0^R \int_0^\pi u^2 f(x) f(y) g(\theta)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{3(5a+4bR)}{5(3a+2bR)} R^2 \quad (20)
\end{aligned}$$

と算出される．またu_{12}，u_{13}，u_{23}の2乗の平均値も，同時密度を$f_i(x)f_j(y)g(\theta)$とした積分を行って

$$< u_{12}^2 >= \frac{11}{10}R^2, < u_{13}^2 >= \frac{4}{5}R^2, < u_{23}^2 >= \frac{9}{10}R^2 \qquad (21)$$

と求められる．以上によってu_{ij}の分散σ_{ij}^2を整理しておく：

$$\sigma_{11}^2 = (0.424528)^2, \sigma_{12}^2 = (0.439778)^2, \sigma_{13}^2 = (0.375173)^2,$$
$$\sigma_{22}^2 = (0.461988)^2, \sigma_{23}^2 = (0.378435)^2, \sigma_{33}^2 = (0.340083)^2.$$

σ_{ij}の相対的な大小関係は (19) に準じたものとなる．

4. 級数展開法を用いた平均距離の計算

今度は [3,4] の **“放射対称な人口分布に対する平均距離の級数展開公式”** を用いて$\bar{u}$の導出を行おう．勿論その結果の数値は前出と全く等価であるが，実は級数展開による結果は，線形人口分布の平均距離を操作する上で有用な構造を与えてくれるのである．

今回の平均距離$\bar{u}$は

$$\begin{aligned}
F_m(x) &= \int x^{2m} f(x)\ \mathrm{d}x, \quad (22) \\
G_m(x) &= \int x^{1-2m} f(x)\ \mathrm{d}x; \quad (23) \\
A_m &= < x^{1-2m} F_m(x) > - F_m(0) < x^{1-2m} > \\
&\quad + G_m(R) < x^{2m} > - < x^{2m} G_m(x) > \quad (24)
\end{aligned}$$

と定義するとき (この場合，記号$< \cdot >$は$\int_0^R (\cdot) f(x) \mathrm{d}x$を意味する)，

$$\bar{u} = \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{(2m-3)!!}{2^m m!} \right\}^2 A_m \qquad (25)$$

なる無限級数で表現できることが分かっている [3,4]．上式を計算し整理すると (過程は少しく煩雑なので割愛する) 次の結果を得る：

$$\bar{u} = \frac{3a(6a+5bR)}{2(3a+2bR)^2} \bar{u}_{11} + \frac{2bR(7a+6bR)}{3(3a+2bR)^2} \bar{u}_{22}. \qquad (26)$$

ただし$\bar{u}_{11}$は (14) の通りであり，$\bar{u}_{22}$の方は次式の様に導出される (その数値は (15) 右式に記した通り)：

$$\bar{u}_{22} = R \sum_{m=0}^{\infty} \frac{18}{7(2m+3)} \left\{ \frac{(2m-3)!!}{2^m m!} \right\}^2. \qquad (27)$$

(26) と (10) は同じ$\bar{u}$の別な表現である (勿論 (26) の方がたった2つの要素$\bar{u}_{11}$と$\bar{u}_{22}$で表現できている点で気が利いている)．だから (26) と (10) の右辺同士を等号で結ぶことによって，$\bar{u}_{12}$を$\bar{u}_{11}$と$\bar{u}_{22}$の1次結合で表現できる．さらに (16)，(17)，(18) ならびに (5) と併せ用いれば次が判明する：

図1に登場した全ての類型ペア間の平均距離を$\bar{u}_{11}$と$\bar{u}_{22}$の1次結合で表現できる．

これは操作上の大きな特長であると言ってよい．

こうした次第により，(27) を (14) 同様の簡潔な表現 (kR/π) に帰着させせられれば (なお更に) 有難い (実用上は本稿の内容で十分)．これは今後の課題である．

5. 参考文献

[1] 腰塚武志 (1977)：都市平面の基礎的研究，東京大学都市工学科博士論文．

[2] Kendall,M.G. and P.A.Moran(1963): *Geometrical Probability*, Charles Griffin & Company Limited, London.

[3] 栗田　治 (1989)：放射対称な人口分布に関する平均距離，都市計画論文集，No.24，pp.331－336.

[4] 栗田　治 (1990)：放射対称な分布における内々平均距離の導出法，日本オペレーションズ・リサーチ学会春季研究発表会アブストラクト集，2－C－5, pp.184－185.