2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

故障を伴うマシンと中間バッファを有する生産ラインの一解析法

千葉工業大学 *仇 莉 QIU Li
01201380 千葉工業大学 鈴木 誠道 SUZUKI Shigemichi

1.はじめに

本稿では，故障を伴ういくつかのマシンと中間バッファを有する生産ラインを取り上げ，待ち行列理論を用いて解析する。その際，マシンのステージやバッファの容量が増えるにしたがって，平衡状態方程式のサイーズの爆発が起こる。そこで，平衡状態確率の厳密解法を求めるのに，遷移確率行列の細部構造まで利用して実質的に方程式を圧縮して解く方法を提案し，従来の方法と比較する。

2.モデル

(1) バッファｉの容量はそれぞれ $M_i<\infty$ (i=1,2,...,n－1)とする。

(2) バッファｉの空き数がマシンi+1中の容量１を含んで m_i であり，$0\le m_i\le M_i+1$ (i=1,2,...,n－1)；マシンｉの加工時間 X_i(i=1,2,...,n)はそれぞれパラメーター，$f_1(m_1)\mu_1$, $f_j(m_{j-1}, m_j)\mu_j$(j=2,...,n－1), $f_n(m_n)\mu_n$ の指数分布とする。ただし,, $f_1(m_1)\mu_1$ を単調増加関数かつ $f_1(0)=1$；$f_i(m_{i-1},m_i)$ をそれぞれ m_{i-1} について単調減少関数，m_i について単調増加関数かつ $f_i(0,m_i)=f_i(m_i)$，$f_i(m_{i-1},0)=f_i(m_{i-1})$；$f_n(m_n)$ を単調減少関数かつ $f_n(0)=1$ とする。m_i(i=1,2,...,n－1)によって，各マシンの生産能力を調整することができる。

(3) マシンｉの故障までの時間 Y_i の分布をそれぞれパラメーター α_i の指数分布とする。マシンｉの修理時間 Z_i の分布をそれぞれパラメーター β_i の指数分布とする(i=1, 2, ..., n)。各機械は加工しない時は故障しないものとする。

(4) 以上の加工時間，修理時間，故障までの時間は互いに独立とする。

(5) 下流バッファに空きがないときはマシンｉは加工を開始しない。このとき，マシンｉは（生産）ブロッキング状態にあるという。

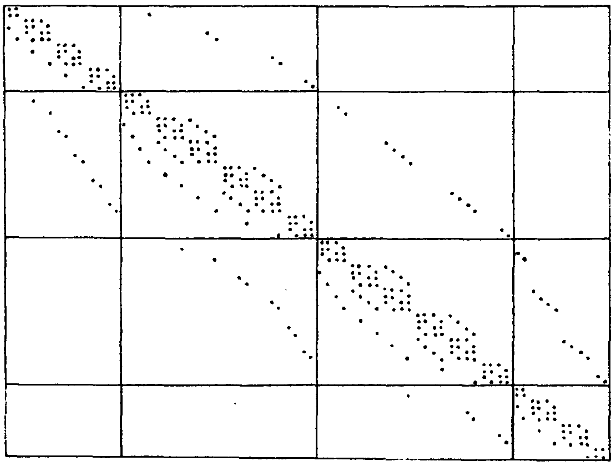
(6) マシ１へは倉庫入力，マシンｎからは製品庫出力を仮定する。

3.解析

任意の時刻ｔでの（ｎ－１）個のバッファの空き数 $(m_1(t), m_2(t), \ldots, m_{n-1}(t))$ とｎ個のマシンの状態 $(s_1(t), s_2(t), \ldots, s_{n-1}(t))$ を用いると，全システムの状態は $S(t)=(m_1(t), m_2(t), \ldots, m_{n-1}(t); s_1(t), s_2(t), \ldots, s_{n-1}(t))$ で表される。$S(t)$ は既約マルコフ過程となる。これらの状態相互間の遷移確率行列Ｑは状態 $(m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}; s_1, s_2, \ldots, s_n)$ に関して辞書式に並べて行列表現すると以下のようになる。

$$Q=\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots\cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{M_1-1M_1-1} & A_{M_1-1M_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & A_{M_1M_1-1} & A_{M_1M_1} & A_{M_1M_1+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & A_{M_1+1M_1} & A_{M_1+1M_1+1} \end{bmatrix}$$

例えば,3つのマシンと２個の中間バッファを有する生産ラインの $M_1=M_2=2$ の場合Ｑ(74次)は以下のようになる。



システムの平衡状態確率 π は平衡状態方程式 $\pi Q=0$, $\pi e=1$（正規化条件）を解くことにより求めることができる。π を求めるには厳密解法と近似解法がある。ここでは，従来の方法を含めて三つの厳密解法を比較する。

(1) 特種構造を利用しない方法

例えば,共役勾配法。

(2) ブロック三重対角構造を利用する方法

この方法はＱの中での A_{ii}(i=0,1,...,M_1+1)に対応する π の部分を $\pi^{(i)}$ (i=0,1,...,M_1+1)としてＱの構造を利用すると,

$\pi^{(i)}=\pi^{(i-1)}\theta_i$, $\theta_i=-A_{i-1i}(A_{ii}+\theta_{i+1}A_{i+1i})^{-1}$ (i=1,...,M_1),

$\pi^{(M1+1)}=\pi^{(M1)}\theta_{(M1+1)}$；

$\theta_{(M1+1)}=-A_{M1\,M1+1}A^{-1}_{M1+1\,M1+1}$;

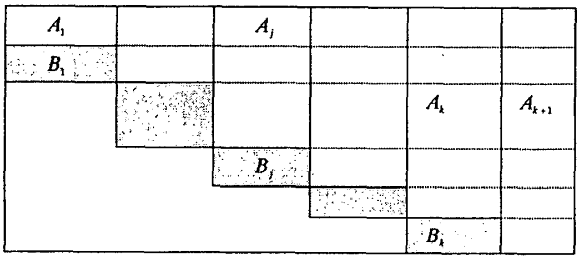
$$\begin{cases} \pi^{(0)}(A_{00}+\theta_1A_{10})=0 \\ \pi^{(0)}\left(\sum_{i=0}^{M_1+1}\prod_{j=0}^{i}\theta_j\tilde{e}_i\right)=1 \qquad \text{(正規化条件)} \end{cases}$$

なる関係が求まる。θ_0 は $\pi^{(0)}$ と同次元の単位行列である。上式から $\pi^{(0)}$ が求めると，$\pi^{(i)}=\pi^{(i-1)}\theta_i$(i=1,...,$M_1$+1)により平衡状態確率 $\pi=(\pi^{(0)}, \pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(M1+1)})$ が求まる。

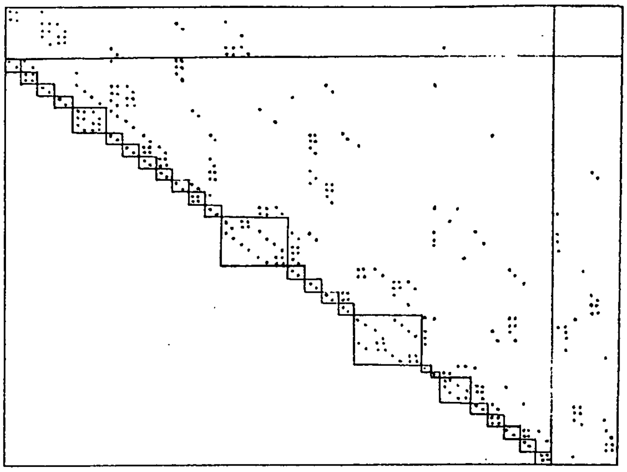
(3) 遷移確率行列の細部構造まで利用する方法（本稿で提案）

この方法は平衡状態方程式の実質的な圧縮を考える。まず,Ｑの行と列の交換によって,Ｑを B_j (ｊ＝1,2,...,ｋ) が正則であるようにして以下のように変形する。

$Q\rightarrow Q^{(1)}=$

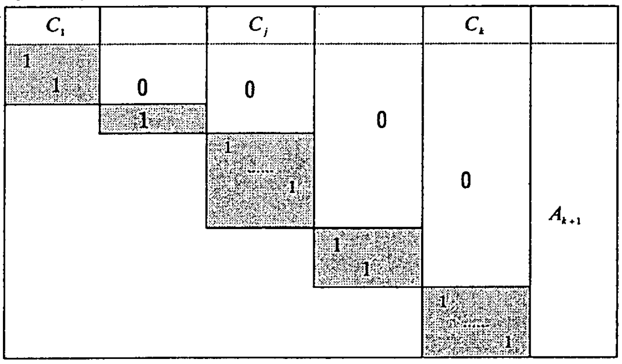


例えば,3つのマシンと2個の中間バッファを有する生産ラインの$M_1=M_2=2$の場合に，$Q^{(1)}$は以下のようになる。



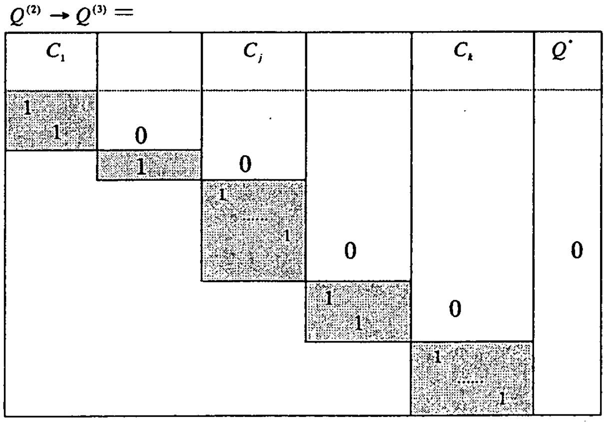
A_1, B_jに対応するπの部分をそれぞれπ_0, π_j（$j=1,2,\ldots,k$）とする。$\pi_j B_j+(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_{j-1}) A_j=0$（$j=1,2,\ldots,k$）に対して，$B_j$のLU分解と$\pi_0$, π_1, …, π_{j-1}の消去によって，$Q^{(1)}$をつぎの形に変換する。

$Q^{(1)} \to Q^{(2)} =$



ここで，$\pi A_{k+1}=0$のπ_1, …, π_kを$\pi_0 C_j+\pi_j=0$　（$j=1,2,\ldots,k$）を用いて消去すると，$Q^{(2)}$はさらに$Q^{(3)}$のように変換される。

$Q^{(2)} \to Q^{(3)} =$



$Q^{(3)}$によって,我々は以下のような圧縮された平衡状態方程式を得る。

$$Q^{(3)} \begin{cases} \pi_0 Q^* = 0 \\ \pi_0 (I - \sum_{j=0}^{k} C_j) e^* = 1 \quad \text{(正規化条件)} \end{cases}$$

一度π_0が求まれば，$\pi_j=-\pi_0 C_j$（$j=1,2,\ldots,k$）により，平衡状態確率$\pi=(\pi_0, \pi_1, \ldots, \pi_k)$が求まる。$Q^{(1)}$のような変形は一意ではない。$Q^{(1)}$への変形を行う一つの方法は$A_1=A_{00}$として,順次定まる，$B_1$, B_2,…，を用いる方法である。しかし,これによって，最適な結果を得られる保証はない。

$l=\max(B_j$の次元数$)$；$l_0=\pi_0$の中の変数の個数とすると，変換の結果は例えばつぎのようになる。

マシンの個数	バッファの個数	l_0	l
2	1	2	2
3	2	$4(M_2+1)$	4
4	3	$8(M_2+1)(M_3+1)+2$	8

4. 結果の比較

各バッファの容量は2の場合に乗除の回数はつぎののようになる。これらの方法を比較すると，遷移確率行列の細部構造まで利用する方法の乗除回数が圧倒的少ないことがわかる。

	3つのマシン Q:74×74 $l_0=12$, $l=4$	4つのマシン Q:456×456 $l_0=74$, $l=8$
共役勾配法	10^5	4.6×10^6
ブロック三重対角構造を利用する方法	3×10^4	5.1×10^6
遷移確率行列の細部構造まで利用する法	5×10^3	3.3×10^5

5. 今後の課題

(1) 遷移確率行列を$Q^{(3)}$の形に効率的に変形する算法の開発。

(2) 本稿の方法は大規模連立方程式の解法への適用可能性の検討。

参考文献

[1] Neuts. M. F.,　“Matrix Geometric Solutions in Stochastic Models—An Algorithmic Approach”,The Johns Hopkins University Press, 1981.

[2] 仇　莉,鈴木　誠道.,“バッファの空き数によって加工時間を変化させる3stage生産ラインのモデル分析”日本オペレーション・リサ-チ学会秋季研究発表会 1999.

[3] Shigemichi　SUZUKI & Li QIU.,“A Method for a Serial Producion Line with Finite Buffer & Machine Failures”, INFORMS Philadelphia 1999.