

## 倒産確率と担保回収確率を考慮した銀行の貸出利率の決定

01402793 名古屋銀行システム部      ○中村 正治 NAKAMURA Syouji  
 01204194 流通科学大学情報学部      三道 弘明 SANDOH Hiroaki  
 01400043 愛知工業大学工学部      中川 暲夫 NAKAGAWA Toshio

### 1. はじめに

銀行では信用リスクの観点から、企業の倒産を考慮したリスク管理が必要となってきた。市場原理より、ハイリスク・ハイリターンから、リスクの高い先への融資には、高い利率を適用し、リスクに見合った収益を考えるべきである。一方、銀行は、融資した企業が倒産すると貸出した資金を回収しなければならない。倒産後の担保回収には融資する時以上の費用が必要となり、担保を完全に回収するには倒産後すぐに回収できる貸出先もあるが、何度も担保回収の手続きが必要な場合もある。本研究では、貸出元金の回収が一括に回収でき、倒産後の担保回収も一括で回収できるとし、しかも、融資先の企業の倒産は倒産確率によって発生し、その後の担保回収は担保回収確率によって回収できるとする。また、企業の倒産確率と担保回収確率は既知とする場合、倒産に伴う損失と倒産後の担保回収費用も見込んだ収益を得るために、貸出当初に貸出利率をどれくらいに設定するかのモデルを提示する。

### 2. 連続複利

金利モデルでは、微分なども考えやすいことから複利の回数を無限大と考えた、連続複利（ここでは、瞬間利率と呼ぶ）を利用する[1]。時刻0における元金の現価を  $P_0$  とする。この元金の時刻  $t$  における価値は、瞬間利率  $\alpha$  の複利で時刻  $t$  まで利息が増加すると考え、その元利合計を  $P(t)$  と書く。このとき、時刻  $t+\Delta t$  における元利合計は

$$P(t+\Delta t) = P(t)(1 + \alpha \Delta t) + \sigma(\Delta t) \quad (1)$$

となる。よって

$$\frac{dP(t)}{dt} = \alpha P(t) \quad (2)$$

なる微分方程式がえられ、初期条件  $P(0) = P_0$  を用いると、

$$P_0 = P(t)e^{-\alpha t} \quad (3)$$

を得る。

### 3. 一括回収のモデル

銀行が貸出期間を定めて融資した企業がある確率で倒産し、さらに、倒産後の貸出元利金の回収はある確率で一括に回収されると仮定した場合、銀行が損失のない貸出利率を求めるモデルを考える。

ここで、記号として、

$M$ : 貸出額、ここでは、全額を預金によって一括調達可能とする。貸出額と預金額は等しい。

$\alpha_1$ : 貸出利率。

$\alpha_2$ : 預金利率。一般には、 $(\alpha_2 < \alpha_1)$ 。

$\beta$ : 担保率、貸出額に対する担保が設定してある割合。  $(0 \leq \beta \leq 1)$

$c_1$ : 単位当り担保回収費用。

$F(t)$ : 倒産確率分布。

$f(t)$ : 倒産確率密度関数。

$Z(t)$ : 担保回収確率分布関数。

$z(t)$ : 担保回収確率密度。

とする。

担保回収金額は、倒産時点の元利金に設定された担保部分であり、担保回収の手続きは無限に行うことから、必ず担保設定部分の元利金は全額回収できるとする。

#### 3.1 倒産がない場合の期待収益

瞬間利率を  $\alpha_1$ , 融資期間を  $T$  としたとき, 時刻 0 に融資した貸出額  $M$  の時刻  $T$  における価値は,

$$S_1 = Me^{\alpha_1 T} \quad (4)$$

となる.

これは, 融資額に対する元利金とも時刻  $T$  で回収すべき額を示している.

これに対し, 瞬間利率  $\alpha_2$  で調達した預金の時刻  $T$  における元利金の支払額は,

$$S_2 = Me^{\alpha_2 T} \quad (5)$$

である. したがって, 銀行の収益  $P_1(T)$  は,

$$P_1(T) = S_1 - S_2 = M(e^{\alpha_1 T} - e^{\alpha_2 T}) \quad (6)$$

となる.

### 3.2 担保回収打ち切り時点

融資した企業が時刻  $t_0$  で倒産した場合, 担保が設定されていない元利金部分  $(1-\beta)Me^{\alpha_1 t_0}$  は損失となるが,  $\beta Me^{\alpha_1 t_0}$  の部分の貸出額については, 担保回収確率に従って回収されると仮定する. 担保が設定されている元金部分の倒産後の担保回収確率を  $z(t)dt$  とすると, 倒産時点  $t_0$  から  $T$  までの担保回収額は  $\int_{t_0}^T \beta Me^{\alpha_1 t_0} z(u)du$  で表される.

ここでは, 担保回収は無限に続けられるとし, 単位時間当りの担保回収コスト  $c_1$  は貸出回収金額や時間の経過に関係なく一定とする. したがって, 時刻  $t_0$  で倒産後  $t$  時点までの担保回収における期待収益  $Q(t|t_0)$  は,  $\bar{Z}(t) = 1 - Z(t)$  とおくと,

$$\begin{aligned} Q(t|t_0) &= \int_{t_0}^t [\beta Me^{\alpha_1 t_0} - c_1(u-t_0)]z(u-t_0)du \\ &\quad - c_1(t-t_0) [1 - \int_{t_0}^t z(u-t_0)du] \\ &= \beta Me^{\alpha_1 t_0} Z(t-t_0) - c_1 \int_{t_0}^{t-t_0} \bar{Z}(u)du \quad (7) \end{aligned}$$

で表わされる [1].  $Q(t)$  を最大にする  $t^*(t^* \geq t_0)$  を求める.  $Q(t)$  を微分して, 0 とおくと,

$$Q'(t) = \beta Me^{\alpha_1 t_0} z(t-t_0) - c_1 \bar{Z}(t-t_0) = 0 \quad (8)$$

ゆえに,

$$z(t-t_0)/\bar{Z}(t-t_0) = c_1/\beta Me^{\alpha_1 t_0} \quad (t \geq t_0) \quad (9)$$

いま,  $Z(t)$  の瞬間回収率を  $\gamma(t) \equiv z(t)/\bar{Z}(t)$  とおくと,  $\gamma(t)$  が単調減少関数, すなわち, 回収率は時間とともに悪くなるとする.  $Q(t)$  を最大にする  $t^*(t_0 \leq t^* \leq \infty)$  は以下のように求められる.

- (i)  $\gamma(0) > c_1/\beta Me^{\alpha_1 t_0} > \gamma(\infty)$  ならば, (9)式を満たす有限で唯一の  $t^*(t_0 \leq t^* \leq \infty)$  が存在する.
- (ii)  $\gamma(0) \leq c_1/\beta Me^{\alpha_1 t_0}$  ならば,  $t^* = t_0$  であり, 回収はしない方がよい.
- (iii)  $\gamma(\infty) \geq c_1/\beta Me^{\alpha_1 t_0}$  ならば,  $t^* = \infty$  であり, いつまでも回収続ける.

担保回収確率分布として, ワイブル分布を仮定すると,  $\gamma(t) \equiv \lambda m t^{m-1} (0 < m < 1)$ ,  $\gamma(0) = \infty$ ,  $\gamma(\infty) = 0$  であり,  $t^*$  は

$$t^* - t_0 = \left[ \frac{c_1}{\beta M \lambda m} e^{-\alpha_1 t_0} \right]^{1/(m-1)} \quad (10)$$

となる. ここで  $t^* < T$  の場合は, 回収資金の再運用となり,  $t^* > T$  の場合は資金の調達となる. 再運用および調達の利率はリスクのない預金利率と同じ利率を適用すると考える. 倒産が  $t_0$  時点で起きた場合の  $T$  時点の  $Q(T|t_0)$  の価値は次式で表される.

$$Q(T|t_0) = Q(t^*|t_0) e^{\alpha_2(t^*-T)} \quad (11)$$

### 3.3 倒産がある場合の期待収益

したがって,  $t_0$  時点で倒産があった場合の  $T$  時点の総期待収益  $P_2(T|t_0)$  は,

$$\begin{aligned} P_2(T|t_0) &= Q(T|t_0) - Me^{\alpha_2 t_0} \\ &= -Me^{\alpha_2 t_0} + (\beta Me^{\alpha_1 t_0} Z(t^*-t_0) \\ &\quad - c_1 \int_0^{t^*-t_0} \bar{Z}(u)du) e^{\alpha_2(t^*-T)} \quad (12) \end{aligned}$$

融資期間を  $T$  とした場合の銀行の期待収益を, 時刻  $T$  時点の価値で表わした  $P_0(T)$  は

$$P_0(T) = P_1(T)F(T) + \int_0^T P_2(T|u)f(u)du \quad (13)$$

となり,  $P_0(T) \geq 0$  となるための貸出利率  $\alpha_1$  を求める.

数値計算は当日発表する.

### [参考文献]

- [1] 北海道拓殖銀行調査部訳, 銀行のオペレーションズ・リサーチ, 日本評論社, 1967年, pp175~199
- [2] Robert Jarrow & Stuart Turnbull, *Derivative Securities*, Thomson Learning Company, 1996
- [3] Barlow, R.E. and Proschan, F., *Mathematical theory of reliability*, Wiley, New York, 1965