2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

大型の稠密な平均・分散モデルの効率的解法

東京工業大学　*川代 尚哉　KAWADAI Naoya
01102370　東京工業大学　今野 浩　KONNO Hiroshi

1　はじめに

ポートフォリオ最適化は，H.Markowitz の平均・分散モデルを出発点とする．このモデルは，分散・共分散行列のランクが低い場合には，コンパクト分解を行うことによって効率的に解くことが出来る [1]．ところが，分散共分散行列がフルランクに近くなると，その効率性は著しく低下する．

そこで本論文では，コンパクト分解がうまく機能しない場合に，平均・分散モデルを線形計画法を用いて効率的に解く方法を提案する．具体的には，日経 225 のようなインデックスを利用して，平均・分散モデルを等価な問題に変形し，ある種の仮定のもとで，最適解に近いと思われる解を線形計画問題を解く事によって求める．次いでその点を初期点として，種々の降下法を適用することにより最適解に収束させる方法を提案する．

2　準備

本論文においては，以下の平均・分散モデルを取り扱う．

$$
(\mathrm{P1})\ \left|\ \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \equiv \boldsymbol{x}^T Q \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} & \boldsymbol{r}^T \boldsymbol{x} = \rho \\ & \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{x} = 1 \\ & \boldsymbol{0} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{u}. \end{array} \right.
$$

但し，

$\boldsymbol{x} \in R^n$:投資比率ベクトル，

$Q = (\sigma_{ij}) \in R^{n\times n}$:収益率の分散・共分散行列，

$\boldsymbol{r} \in R^n$: 期待収益率ベクトル，

$\boldsymbol{u} \in R^n$: 各銘柄の購入量の上限制約ベクトル，

ρ : 期待収益率，

$\boldsymbol{e} = (1, 1, \cdots, 1)^T$.

また，問題 (P1) の許容領域を，

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, i = 1, \cdots, n+2\}$$

と書く．

3　初期点の計算

一般的に，あらゆる株式の価格は，マーケットポートフォリオの価格が上昇すると，それに反応して上昇する傾向にあり，下落するときにはそれに反応して下落する傾向にある．この研究をもとにシャープ [2] は，マーケットポートフォリオの価格を，個別株式に影響を与える共通要因として考える，「シングル・ファクターモデル」を導入した．すなわち，第 j 資産の超過収益率を R_j，市場平均ポートフォリオの超過収益率を R_Mとすると，以下のような関係式が成立すると仮定するモデルである．

$$\tilde{R_j} = \beta_j \tilde{R_M} + \alpha_j + \tilde{\varepsilon_j}, j = 1, \cdots, n \tag{1}$$

ここで，$\beta_j \tilde{R_M}$は，マーケットポートフォリオの収益率の変動によって説明できる部分であり，β_jはベータ値と呼ばれる定数である．$\tilde{\varepsilon}$ は，平均 0，分散$\sigma_j{}^2$ の確率変数である．

式 (1) を利用すると，σ_{ij}は，

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma^2{}_M + \sigma'_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n. \tag{2}$$

但し，

$$\sigma^2{}_M = E[(\tilde{R_M} - E[\tilde{R_M})^2], \sigma'_{ij} = E[\tilde{\varepsilon_i}\tilde{\varepsilon_j}]$$

と書ける．

式 (2) を利用すると，問題 (P1) は以下のように書きかえられる．

$$
(\mathrm{P2})\ \left|\ \begin{array}{ll} \text{minimize} & \sigma_M{}^2 (\sum_{i=1}^{n} \beta_j \boldsymbol{x}_j)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \sigma'_{ij} \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{x}_j \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S. \end{array} \right.
$$

一般に株式市場において，大多数の銘柄の収益率は，市場平均ポートフォリオの収益率に連動しているので，以下のような関係式が成立するはずである．

$$\sigma_M{}^2 >> \sigma'_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n.$$

よって以下に示す問題(P3)の最適解は，問題(P2)の最適解の近似解を与える．

$$
\text{(P3)} \left| \begin{array}{ll} \text{minimize} & \sigma_M{}^2(\sum_{i=1}^{n}\beta_j \boldsymbol{x}_j)^2 \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x} \in S. \end{array} \right.
$$

問題(P3)の最適解は，以下の線形計画問題(P4)を解くことによって得られる．

$$
\text{(P4)} \left| \begin{array}{ll} \text{minimize} & y \\ \text{subject to} & y = \sum_{i=1}^{n}\beta_j \boldsymbol{x}_j \\ & \boldsymbol{x} \in S. \end{array} \right.
$$

問題(P4)の最適解$\boldsymbol{x}'$は，問題(P1)の最適解$\boldsymbol{x}^*$の近似解を与えるものと考えられる．また，問題(P4)は線形計画問題なので，問題(P1)と比べて非常に高速に解ける．この傾向は，nが大きくなるに従ってより一層顕著になる．以上より，以下で説明するアルゴリズムでは，出発点$\boldsymbol{x}_0$として$\boldsymbol{x}'$を採用する．

4 アルゴリズム

本論文において提案するアルゴリズムは，以下のようになる．なお，降下方向ベクトル$\boldsymbol{d}^k$の算出において，はじめの段階では射影最急降下法を用いるが，$\boldsymbol{x}^k$がある程度最適解$\boldsymbol{x}^*$に近づいたならば，射影準ニュートン法を採用する．

step 0 $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}', k = 0$とする．

step 1 $\boldsymbol{x}^k$において$\boldsymbol{d}^k \in R^n$に関する線形計画問題;

$$
(D_k) \left| \begin{array}{ll} \text{minimize} & \nabla f(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{d}^k \\ \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}^k) + \nabla g_i(\boldsymbol{x}^k)\boldsymbol{d}^k \le 0, \\ & i = 1, \cdots, n+2, \end{array} \right.
$$

を解いて，$\boldsymbol{d}^k$を得る．

step 2 $\boldsymbol{x}^{k+1} = \boldsymbol{x}^k + \alpha^k \boldsymbol{d}^k \in M_E(\boldsymbol{x}^k, \boldsymbol{d}^k)$, とする．但し，$M_E$は直線探索のアルゴリズムである．従って，

$$
\alpha^k = argmin\{f(\boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{d}^k) \mid \boldsymbol{x}^k + \alpha \boldsymbol{d}^k \in S\},
$$

となる．

step 3 $k = k+1$として，$f(\boldsymbol{x}^k) - f(\boldsymbol{x}^{k+1}) \ge \epsilon_1$なら*step1*へ，$\epsilon_1 \ge f(\boldsymbol{x}^k) - f(\boldsymbol{x}^{k+1}) \ge \epsilon_2$なら*step4*へと進む．それ以外なら*step6*へ進む．但し，ϵ_1とϵ_2は，$\epsilon_1 \ge \epsilon_2$である十分小さな正数であるとする．

step 4 *Goldfarb*の方法によって$\boldsymbol{d}^k \in R^n$を得る．

step 5 $k = k+1$として*step2*へ進む．

step 6 終了．

このプロセスで解くべき問題は，いずれも単純な制約条件をもつ線形計画問題なので，容易に解けるのが特徴である．

5 数値実験とその結果

本論文で提案したアルゴリズムを利用して，銘柄数nが600程度の問題を用いて数値実験を行った．データとしては東京証券取引所一部上場銘柄を利用した．この結果，行列Qがフルランクに近い場合には，最適解が得られるのに要する時間は，既存のコマーシャル・ソフトウェアに比べて10分1程度に削減されることが分かった．

なお，数値実験結果の詳細については，発表当日に紹介する．

参考文献

[1] Konno,H.and Suzuki,K.,"A Fast Algorithm for Solving Large Scale Mean Variance Models by Compact Factorization of Covariance Matrices",*J.of the Operations Research Society of Japan*,35(1992),pp.93-104.

[2] Sharpe,W.F.,"A Simplified Model for Portfolio Analysis",*Management Science*,9(1963),pp.277-293.

[3] 今野浩,山下浩,「非線形計画法」,日科技連出版社,1978.