2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル

01505910 慶應義塾大学 ＊枇々木 規雄 HIBIKI Norio

1 はじめに

本研究では、長期的な動的投資政策のための最適資産配分決定問題について議論する。機関投資家は、様々な不確実性、政策や法的制約、その他の条件のもとで、好ましい効用、もしくはリスク・リターン特性を持つように、長期的に戦略的な資産配分を行う必要がある。多期間モデルによるポートフォリオ最適化問題として最初に提案されたのは、確率制御(動的確率計画)モデルのタイプであり、Merton[2] と Samuelson[3] によって基本的枠組みが提示された。確率制御モデルは一般に問題を解くのが難しく、実際に多期間ポートフォリオ問題を解くためのモデルとしては、シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルが中心となって発展している。シナリオ・ツリーを用いた多期間確率計画モデルは近年、コンピュータの高速化と解法アルゴリズムの発展に伴い、大規模な問題を解くことが可能になり、様々な研究が行われている。一方、確率制御モデルのタイプでもモンテカルロ・シミュレーションにより発生させたパスを利用して不確実性を記述するモデル化が考えられるが、非凸非線形計画問題として定式化されるため、一般に大域的最適解を保証することができない。

本研究では、モンテカルロ・シミュレーションによるパスを用いて不確実性を記述した確率制御(動的確率計画)モデルの枠組みのもとで、従来想定している投資決定ルールを変更することによって線形計画問題として記述できるモデル化(定式化)を提案する。通常、ポートフォリオ最適化問題は投資比率を求める問題として記述されるが、多期間モデルではそのことがモデルの非線形構造の原因となっている。そこで、投資比率の代わりに投資額または投資量を求める問題に変更する(投資ルールを変更する)ことによって、線形計画モデルとしての定式化を可能にする。線形計画問題として定式化が可能になれば、大規模な問題でも大域的最適解の導出が保証され、実務的にも有効なモデル化になる。ここでは、このタイプのモデルを「シミュレーション型多期間確率計画モデル」と呼ぶ。

2 投資の意思決定とモデル化

シミュレーションでは1本の経路にだけ注目すると、t 時点の状況の次に発生する $t+1$ 時点の状況は1つしか想定しない。したがって、各状況毎に投資の意思決定を別々に行うと、それは確定条件下での意思決定を行うことになる。そこで、シミュレーション型モデルの場合には、すべての時点で状況に依存しない(どの状況に到達するかに関わらない)取引戦略による意思決定を行わなければならない。ここで、「状況に依存しない取引戦略」とは、一つの投資決定をすべてのシミュレーション経路[1] に適用することを意味する。

決定変数の取り扱い

モデル別の「状況に依存しない取引戦略」に応じた決定変数の取り扱い方を設定する。

- 投資比率決定モデル
- 投資額決定モデル
- 投資量決定モデル

モデルの選択

3つのモデル(投資比率決定モデル、投資額決定モデル、投資量決定モデル)は等価なモデルではない。投資比率決定モデルは非凸非線形制約式を含む定式化になるので、それを用いる取引戦略の考え方に特にこだわらなければ、解法上の容易さから、「投資額決定モデル」もしくは「投資量決定モデル」のどちらかで解くことが望ましい。

3 投資量決定モデル

以降では、紙面の都合上、投資量決定モデルについて議論する。取引戦略は以下の通りである。

『どの状況が生じた場合でも、危険資産 j への投資量を同一にする。各経路での投資による富は異なるが、その富の違いはすべて現金で保有する。したがって、シミュレーション経路の各時点(状況)における現金の保有額は同一ではない。』

シミュレーション型多期間確率計画モデルを用いた資産配分問題を記述する。n 個の危険資産 $(j=1,\ldots,n)$ と現金 $(j=0)$ に資金を配分する問題を考える。0時点を投資開始時点、T 時点を計画最終時点とする。

計画最終時点での富(最終富)の期待値をリターン尺度、最終富の目標富に対する不足分(1次の下方部分積率)をリスク尺度とする最適化モデルを記述する。

(1) パラメータ

ρ_{j0}：0時点の危険資産 j の価格

[1]モンテカルロ・シミュレーションによって生成された複数のサンプル・パス(乱数を用いて離散的な価格変動を数値的に記述した一連の経路)をここでは略して、シミュレーション経路と呼ぶ。

$\rho_{jt}^{(i)}$: t 時点の経路 i の危険資産 j の価格

r_0 : 期間 1 (0 時点) のコールレート。

$r_{t-1}^{(i)}$: 期間 t ($t-1$ 時点) の経路 i のコールレート。

W_0 : 0時点での初期富。

W_G : 計画最終時点での目標富。

W_E : 計画最終時点での投資家が要求する期待富。

I : 経路の本数 (シミュレーションの回数)

(2) 決定変数

z_{jt} : t 時点の危険資産 j への投資量

v_0 : 0 時点の現金保有額。

$v_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の現金保有額。

$W_t^{(i)}$: t 時点の経路 i の富。

$q^{(i)}$: T 時点の経路 i の富の目標富に対する不足分。

【 投資量決定モデル 】

$$\text{minimize} \quad LPM_1 \equiv \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} q^{(i)} \tag{1}$$

subject to (2)

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j0} z_{j0} + v_0 = W_0 \tag{3}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{j1}^{(i)} (z_{j1} - z_{j0}) = (1+r_0)v_0 - v_1^{(i)}, (i=1,\ldots,I) \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_{jt}^{(i)} (z_{jt} - z_{j,t-1}) = \left(1 + r_{t-1}^{(i)}\right) v_{t-1}^{(i)} - v_t^{(i)}, \quad (t=2,\ldots,T-1;\ i=1,\ldots,I) \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{\rho}_{jT} z_{j,T-1} + \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I}\left(1 + r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)} \geq W_E \tag{6}$$

$$\left\{\sum_{j=1}^{n} \rho_{jT}^{(i)} z_{j,T-1} + \left(1 + r_{T-1}^{(i)}\right) v_{T-1}^{(i)}\right\} + q^{(i)} \geq W_G, \quad (i=1,\ldots,I) \tag{7}$$

$$z_{jt} \geq 0, \quad (j=1,\ldots,n;\ t=0,\ldots,T-1) \tag{8}$$

$$v_0 \geq 0 \tag{9}$$

$$v_t^{(i)} \geq 0, \quad (t=1,\ldots,T-1;\ i=1,\ldots,I) \tag{10}$$

$$q^{(i)} \geq 0, \quad (i=1,\ldots,I) \tag{11}$$

4 数値実験

- 3期間 (1期間は、1ヶ月間)
- シミュレーション経路 : 500 経路
- 対象資産 : 株式、債券、CB、現金 (コール)
- 制約式: 1507本、決定変数: 1514個
- 計算時間 : 約2秒 (Pentium 700MHz, 256MB)
- ソフトウェア: NUOPT(数理システム)

表 1 : 最適投資量

		現金(平均)			株式		
		0	1	2	0	1	2
ケース1	リスク最小化	7849.5	7865.2	6984.1	0.0	0.0	0.0
ケース2	$W_E = 10,165$	6128.8	6016.5	3227.4	0.0	655.7	223.4
ケース3	$W_E = 10,180$	3997.9	3856.0	1063.0	239.9	1002.3	423.0
ケース4	$W_E = 10,195$	590.5	970.2	192.6	514.2	1136.5	504.6
ケース5	$W_E = 10,210$	0.0	168.7	213.3	864.7	1825.2	956.4
ケース6	$W_E = 10,225$	0.0	192.9	179.2	984.8	2673.9	1283.8
ケース7	$W_E = 10,240$	0.0	186.1	210.6	1671.8	3513.2	1909.6
ケース8	期待富最大化	0.0	0.0	0.0	10000.0	10000.0	10000.0

	債券			CB			最終期待富	LPM_1
	0	1	2	0	1	2		
ケース1	1383.0	1862.2	3075.3	767.5	307.7	0.0	10148.7	0.00
ケース2	2967.8	3317.4	6569.0	903.3	36.4	0.0	10165.0	4.53
ケース3	4521.2	5029.8	8516.0	1240.9	128.6	0.0	10180.0	14.20
ケース4	7331.2	7899.5	9306.3	1564.1	0.0	0.0	10195.0	26.69
ケース5	5227.0	6541.9	6958.4	3908.3	1467.1	1878.8	10210.0	49.30
ケース6	2732.6	3452.3	3694.6	6282.6	3682.5	4847.4	10225.0	97.04
ケース7	0.0	392.4	926.1	8328.2	5909.3	6959.9	10240.0	157.24
ケース8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	10258.3	276.49

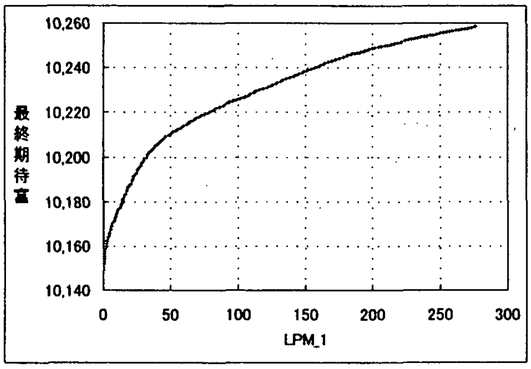

図 1 : 効率的フロンティア

5 結論と今後の課題

本研究では、多期間にわたる最適資産配分決定のための多期間線形確率計画モデルを提案した。大規模な問題も解くことができるのに加え、計算機上の実装もある程度容易である。モデルの振る舞いを検証するために、500サンプルの簡単な数値実験も行った。リスクとリターンの間のトレード・オフの関係や具体的な資産配分政策を示した。サンプル数や資産数、資産価格の従う確率分布を様々に変えたときのモデルの振る舞いについては今後の課題としたい。

参考文献

[1] 枇々木規雄, 戦略的資産配分問題に対する多期間確率計画モデル, 慶應義塾大学理工学部管理工学科テクニカルレポート, No.99002(1999).

[2] R.C. Merton, Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case, *The Review of Econmics and Statistics*, **51** (1969), pp.247–257.

[3] P.A. Samuelson, Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming, *The Review of Econmics and Statistics*, **51** (1969), pp.239–246.