単調非線形相補性問題における有効添字集合の同定法

京都大学大学院情報学研究科 山下 信雄 YAMASHITA Nobuo
*檀 寛成 DAN Hiroshige
福島 雅夫 FUKUSHIMA Masao

1 序論

非線形相補性問題 (Nonlinear Complementarity Problem, 以下NCP) とは，与えられた関数$F:\Re^n \to \Re^n$に対し，以下の条件を満たすベクトル$x \in \Re^n$を求める問題である．

$$\mathrm{NCP}(F):\quad x \geq 0,\ F(x) \geq 0,\ x^T F(x) = 0$$

本発表ではFは単調で微分可能な関数とする．ここで，Fが単調であるとは，

$$(x-y)^T(F(x)-F(y)) \geq 0 \ \ \forall x, y \in \Re^n$$

が成り立つことをいう．

NCP(F)は，すべてのiに対して

$$\bar{x}_i \geq 0, F_i(\bar{x}) \geq 0, \bar{x}_i F_i(\bar{x}) = 0$$

をみたす$\bar{x}$を求める問題と等価である．ここで，解$\bar{x}$に対して次の添字集合を定義する．

$$\begin{aligned} P(\bar{x}) &:= \{i \mid \bar{x}_i > 0, F_i(\bar{x}) = 0\} \\ N(\bar{x}) &:= \{i \mid \bar{x}_i = 0, F_i(\bar{x}) > 0\} \\ C(\bar{x}) &:= \{i \mid \bar{x}_i = 0, F_i(\bar{x}) = 0\} \end{aligned}$$

ここで，$C(\bar{x}) \neq \emptyset$であるとき，$\bar{x}$を退化解といい，そうでないものを非退化解という．

点列$\{x^k\}$が非退化解$\bar{x}$に収束する場合を考える．このとき，

$$\begin{aligned} P^k &:= \{i \mid x_i^k > F_i(x^k)\} \\ N^k &:= \{i \mid x_i^k < F_i(x^k)\} \end{aligned}$$

とすると，Fの連続性に注意すれば，十分大きなkに対して

$$P(\bar{x}) = P^k, N(\bar{x}) = N^k$$

となる．そのため，NCP(F)はより簡単な問題に帰着できる．しかしながら，点列$\{x^k\}$が退化解に収束する場合には，このような手法は適用できない．

本発表では，点列$\{x^k\}$が近接点法 (Proximal Point Algorithm) で生成されるとき，点列$\{x^k\}$の収束点x^*における有効添字集合の同定手法を提案する．なお，単調なNCPに対する近接点法によって生成される点列は，NCP(F)のある解に収束することが示されている [2, 3]．さらに，この性質を用いることによって，NCP(F)が等価な等式制約付き最小化問題になることを示す．

2 NCPに対する近接点法

この節では，NCPに対する近接点法の紹介をする．まず，近接点法の実装において重要な役割を果たすNCP(F)の等価な方程式系への再定式化について述べる．Fischer-Burmeister 関数 $\phi_{FB}:\Re^2 \to \Re$

$$\phi_{FB}(a,b) = \sqrt{a^2+b^2} - a - b$$

を用いて，関数$H_F:\Re^n \to \Re^n$を次式で定義する．

$$H_F(x) = \begin{pmatrix} \phi_{FB}(x_1, F_1(x)) \\ \vdots \\ \phi_{FB}(x_n, F_n(x)) \end{pmatrix}$$

ここで，簡単な計算によって，

$$\phi_{FB}(a,b) = 0 \Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0, ab = 0$$

であることが確認できるので，NCP(F)は

$$H_F(x) = 0$$

と等価になる．

NCPの解法として，様々な手法が提案されているが，その中でも近接点法は，生成される点列がNCPのある解に収束し，NCPの解集合との距離が比較的緩い条件の下でも0に超一次収束するという，優れた収束性を持つことが示されている [2, 3]．その手法をアルゴリズムPPとし，以下に示す．

アルゴリズムPP

Step 1: パラメータ$\beta \in (0,1), c_0 \in (0,1)$と初期点$x^0 \in \Re^n$を選ぶ．$k := 0$とする．

Step 2: もしx^kがNCP(F)の近似解であれば計算を終了する．

Step 3: 関数$F^k:\Re^n \to \Re^n$を

$$F^k(x) = F(x) + c_k(x - x^k)$$

で定義し，次の条件を満たすNCP(F^k)の近似解x^{k+1}を求める．

$$\|H_{F^k}(x^{k+1})\| \leq \beta^k \min\{1, \|x^{k+1} - x^k\|\}$$

Step 4: c_{k+1}を更新し，$k := k+1$としてStep 2へ．

なお，Step 3 において近似解 x^{k+1} を求める手法としては，De Luca ら [1] によって提案された一般化ニュートン法（Generalized Newton Method）が考えられる．

ここで，次の仮定が成り立つものとする．

仮定 1

(i) F はリプシッツ連続である．

(ii) $c_k = \alpha^k(\alpha \in (0,1)), 0 < \beta < \alpha$ とする．

(iii) $\|H_F(x)\|$ が局所的エラーバウンドになっている，すなわち次の不等式を満たす正の定数 b_1, b_2 が存在する．

$$\|H_F(x)\| \le b_1 \Rightarrow \mathrm{dist}\{x, X\} \le b_2\|H_F(x)\|$$

ここで，X は *NCP(F)* の解集合である．

仮定 1 の下では，$\mathrm{dist}\{x^k, X\}$ は 0 に超一次収束する，すなわち，

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{dist}\{x^{k+1}, X\}}{\mathrm{dist}\{x^k, X\}} = 0 \tag{1}$$

が成立する [3].

3 有効添字集合の同定

まず，同定関数列を次のように定義する．

定義 2 $\{x^k\}$ を *NCP(F)* の解 x^* に収束する点列とする．さらに，関数列 $\{f^k\}$ に対して添字集合 P^k, N^k, C^k を次式で定義する．

$$\begin{aligned}
P^k &:= \{i \mid x_i^k > f^k(x^k), F_i(x^k) \le f^k(x^k)\}\\
N^k &:= \{i \mid x_i^k \le f^k(x^k), F_i(x^k) > f^k(x^k)\}\\
C^k &:= \{i \mid x_i^k \le f^k(x^k), F_i(x^k) \le f^k(x^k)\}
\end{aligned}$$

ここで，十分大きな k に対して

$$P^k = P(x^*),\quad N^k = N(x^*),\quad C^k = C(x^*)$$

となるとき，$\{f^k\}$ を $\{x^k\}$ に対する *NCP(F)* の同定関数列という．

(1) を用いると，次の補題を示すことができる．なお，アルゴリズム PP によって生成される点列 $\{x^k\}$ の収束点を x^* とする．

補題 3 仮定 *1* が成立しているとき，十分大きな k に対して，次式が成立する．

$$\|x^k - x^*\| \le B_2 \frac{\|H_F(x^k)\|}{\alpha^k}$$

ここで，B_2 は k に依存しない正の定数である． □

補題 3 を用いると，次の定理を示すことができる．

定理 4 $\{x^k\}$ をアルゴリズム *PP* で生成される点列とする．このとき，

$$\rho^k(x) = \sqrt{\frac{\|H_F(x)\|}{\alpha^k}}$$

で定義される $\{\rho^k\}$ は $\{x^k\}$ に対する *NCP(F)* の同定関数列である． □

4 応用

定理 4 を用いると，次の定理で示すように，NCP に対してアルゴリズム PP の計算が十分に進んだときに，NCP を等式制約付き最小化問題に帰着できることがわかる．

定理 5 十分に大きい k に対して，等式制約付き最小化問題

$$\begin{array}{ll}
\min & \frac{1}{2}\|x - x^k\|^2\\
\text{subject to} & F_{P^k}(x) = 0, x_{N^k} = 0\\
 & F_{C^k}(x) = 0, x_{C^k} = 0
\end{array} \tag{2}$$

の解は *NCP(F)* の解になっている． □

特に線形相補性問題（Linear Complementarity Problem, 以下 LCP）の場合，(2) は等式制約のみを持つ凸二次計画問題となっており，その Karush-Kuhn-Tucker 条件は線形方程式系となる．そこで，k が十分に大きいとき，その線形方程式系の解が LCP の解になることをアルゴリズム PP の停止条件に利用すれば，有限回の反復で停止するようなアルゴリズムを構築することができる．

5 まとめ

本発表では，NCP に対するアルゴリズム PP の計算が十分に進んだときに，生成される点列の収束点の有効添字集合を正しく同定する手法を示した．一般に，解が退化しているときには，アルゴリズム構築の上で，そのことが困難を引き起こすことが多い．その困難を，本発表の手法を応用することで克服できる可能性がある．

参考文献

[1] T. De Luca, F. Facchinei and C. Kanzow, A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems, Mathematical Programming, 75 (1996), 407-439.

[2] R. T. Rockafellar, Monotone operators and the proximal point algorithm, SIAM Journal on Control and Optimization, 14 (1976), 877-898.

[3] N. Yamashita and M. Fukushima, The proximal point algorithm with genuine superlinear convergence for the monotone complementarity problem, Technical Report 99012, Department of Applied Mathematics and Physics, Kyoto University, Kyoto, Japan, 1999.