サブシステム間信頼度配分のための荷重係数付きコスト最小化モデル

01205220　日本大学生産工学部　篠原正明
Nihon University　Shinohara Masaaki

NTT SI 基盤研究所　松村龍太郎
NTT　Matsumura Ryutarou

1. はじめに

システムが複数のサブシステムから論理上は直列的に構成される場合について、システム全体の不稼働率が与えられたもとで不稼働率をサブシステム間に配分するための枠組として荷重係数付きコスト最小化モデルを提案する。システムコスト一定下での荷重係数付き不稼働率最小化モデルとの関係を議論し、さらに、階層メモリアクセスシステムと高度サービス通信網について、具体的応用例を与えた。

2. 荷重係数付きコスト最小化モデル

サブシステム$i(=1,\ldots,N)$はx_i個のユニットiの並列接続より構成される。ユニットiの1ユニット当りのコストをk_i、不稼働率をp_iとする。

[荷重係数付きコスト最小化モデル問題WC_{min}]

目的関数：　$\sum w_i C_i$　→　最小化　(1)

特性条件：　$\sum U_i = U_{spec}$　(2)

$C_i = k_i x_i$　(3)

$U_i = p_i^{x_i}$　(4)

ここで，(1)式において、C_iがサブシステムiのコストであり、w_iはその重み（荷重係数）である。(2)式において、U_iはサブシステムiの不稼働率であり、システム全体の不稼働率Uは厳密には、包除原理により(5)式で評価するが、Uを第一項で近似する。

$$U = \sum U_i - \sum_{i>j} U_i U_j + \sum_{i>j>k} U_i U_j U_k \cdots \tag{5}$$

又、(3), (4)式において、x_iはユニット数であり本来は整数変数であるが、以下の最適性条件導出においては連続変数として扱う。

ラグランジュ関数$L(\mathbf{x},\lambda)$ (6)式を構成し、これを$\mathbf{x}$で偏微分して((7)式), (8)式の最適性条件を得る。

$$L(\mathbf{x},\lambda) = \sum w_i k_i x_i + \lambda(U_{spec} - \sum p_i^{x_i}) \tag{6}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = w_i k_i - \lambda p_i^{x_i} \ln p_i = 0 \tag{7}$$

[問題WC_{min}の最適性条件]

$$\lambda^{-1} = \frac{U_1 \ln p_1}{w_1 k_1} = \frac{U_2 \ln p_2}{w_2 k_2} = \ldots \frac{U_N \ln p_N}{w_N k_N} \tag{8}$$

3. 荷重係数付き不稼働率最小化モデル

次の問題WU_{min}を考える。

[荷重係数付き不稼働率最小化モデル問題WU_{min}]

目的関数：$\sum v_i U_i$　→最小化　(9)

制約条件：$\sum C_i = C_{spec}$　(10)

同様にラグランジュ関数を構成し、最適性条件を導出する。

[問題WU_{min}の最適性条件]

$$\mu = \frac{v_1 U_1 \ln p_1}{k_1} = \frac{v_2 U_2 \ln p_2}{k_2} = \ldots = \frac{v_N U_N \ln p_N}{k_N} \tag{11}$$

(コメント1) $v_i w_i = 1$とすれば、問題WC_{min}と問題WU_{min}は、最適性条件が等価となる。これは、「問題A:制約$g(x)=g_0$下で$f(x)$を最小化」と「問題B:制約$f(x)=f_0$下で$g(x)$を最大化」という一対の非線形計画問題の最適性の必要条件も（制約部分を除いて）等しくなるという結果をさらに特殊化した結果と考えられる。

(コメント2) 最適性条件に従えば、$U_i \ln p_i$を$w_i k_i$（あるいはk_i / v_i)に比例して配分すればよい（4.1と4.2の応用例参照）。

(コメント3) 荷重係数を無視して考えると(w_i=1, v_i=1), 最適性条件は$\eta_i = -\log p_i / k_i$とU_iを反比例させることを意味する。ここで、η_iはminus-dB-unavailability efficiencyとよばれる一種の信頼性の効率性尺度であり、η_iが大きいほどコスト当りのある種の信頼性（稼働率）は高くなる。すなわち、この信頼性効率値が高いサブシステムの不稼働率は低くすべきである(正確には、反比例)。

(コメント4) (3)式で$C_i = k_i x_i$としたが、$C_i = k_i(x_i)$と非線形関数で与えられる場合は、k_iを$k_i' = (dk_i(x_i)/dx_i)$とすればよい。$C_i = S_i \sqrt{x_i}$の場合には、t_iをユニット当りの平均コスト$(t_i = C_i / x_i)$とすれば、形式的にk_iをt_iで置換するだけで同一の最適性条件がそのまま成立する。

4. 応用例

4.1 階層メモリアクセスシステム

図1に示す3階層メモリアクセスシステムを考える。1次メモリの1ノード下にはM_1個の端末、2次メモリの1ノード下にはM_2個の1次メモリノード、3次メモリノード下にはM_3個の2次メモリノードが存在する（3次メモリノード

数=1）。1次メモリ、2次メモリ、3次メモリへの各アクセスが成功した下で端末のアクセス試行は成功裏に完了し、端末毎のアクセス試行頻度は均等とする。i次メモリのユニット当りコストをk_i、ユニット当り不稼働率をp_iとする。

端末毎のアクセス試行頻度は$M_1M_2M_3$個の全端末に関して等しいと仮定しているので、アクセス試行当りのコストは端末当りのコストに比例する。従って、アクセス試行当りのコスト最小化不稼働率配分は、端末当りのコストを最小化する荷重係数付きコスト最小化モデルに帰着される。

$$\text{端末当りコスト} = \frac{C_1}{M_1} + \frac{C_2}{M_1M_2} + \frac{C_3}{M_1M_2M_3}$$

$$= \frac{k_1x_1}{M_1} + \frac{k_2x_2}{M_1M_2} + \frac{k_3x_3}{M_1M_2M_3} \qquad (12)$$

従って、

$w_1 = 1/M_1, w_2 = 1/M_1M_2, w_3 = 1/M_1M_2M_3$とすれば、端末当りのコスト、すなわち、各メモリノードのサービス範囲、この場合は収容端末数、を考慮した不稼働率配分が(8)式により達成できる。これは、ν_1=M_1, ν_2=M_1M_2, ν_3=$M_1M_2M_3$とした荷重係数付き不稼働率総和を最小化しているとも解決出来る。

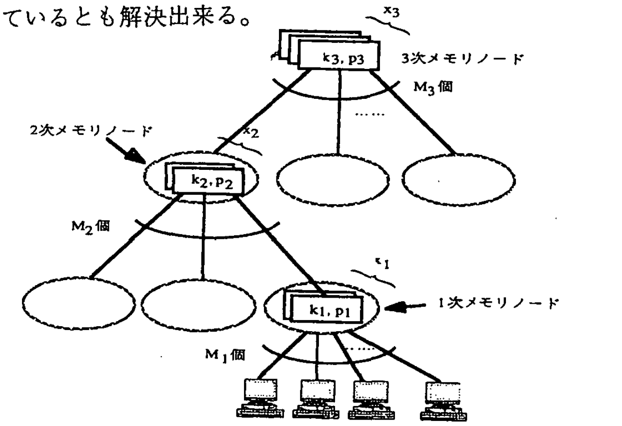

図１　階層メモリアクセスシステムの説明図

4.2 高度サービス通信網

DB（データベース）系、信号網、通信伝達網から構成される高度サービス通信網（図2）を考える。通信伝達網はM個のLSノードが通信リンク（実線）によりメッシュ状に接続されており、LSノード間の通信接続のために2本の信号リンク（点線）と1つの信号中継ノードSTPを経由して関連信号を送受信する。STPとDBの間に設定された専用リンク（破線）を介して、サービス情報をDBへアクセスする。

M個のLSノード間にはm=M(M-1)/2通りの通信接続パターンが存在し（LS自局内接続は考慮外）、この通信接続当りのコストK/connectionならびに通信接続が確保されるための稼働率A/connectionは次式で評価される。

$$K/connection = \frac{m\gamma_l + M\gamma_n}{m}x_1 + \frac{\gamma_{STP} + M\gamma_s}{m}x_2 + \frac{\gamma_{DB} + \gamma_d}{m}x_3 \qquad (13)$$

$$A/connection = 1 - (U_1 + U_2 + U_3) \qquad (14)$$

$$U_i = p_i^{x_i}\ (i = 1,2,3) \qquad (15)$$

$$p_1 = 2q_n + q_l \qquad (16)$$

$$p_2 = 2q_s + q_{STP} \qquad (17)$$

$$p_3 = q_d + q_{DB} \qquad (18)$$

但し、γ_j, q_jは部品jのユニット当りコスト、ユニット当り不稼働率で添字jはnがLSノード、lがLS間リンク、sが信号リンク、dが専用リンクを意味する。又、式(16)〜(18)においても包除原理の第一項で近似した。従って、$k_1 = m\gamma_l + M\gamma_n$, $k_2 = \gamma_{STP} + M\gamma_S$, $k_3 = \gamma_{DB} + \gamma_d$, $w_1 = w_2 = w_3 = m$とすれば、(8)式により荷重係数付きコスト最小化モデルでの不稼働率配分が達成できる。

次に、ノード系に注目する特別な場合を考察する。$\gamma_l = \gamma_s = \gamma_d = 0$, $q_l = q_s = q_d = 0$と置くと、式(13)は次式となる。

$$\text{K/connection} = \frac{M\gamma_n}{m}x_1 + \frac{\gamma_{STP}}{m}x_2 + \frac{\gamma_{DB}}{m}x_3$$

$$= \frac{2\gamma_n}{M-1}x_1 + \frac{2\gamma_{STP}}{M(M-1)}x_2 + \frac{2\gamma_{DB}}{M(M-1)}x_3 \qquad (19)$$

従って、この場合には$k_1 = \gamma_n, k_2 = \gamma_{STP}, k_3 = \gamma_{DB}$とし、$w_1 = 2/(M-1), w_2 = 2/M(M-1), w_3 = 2/M(M-1)$, $p_1 = 2q_n, p_2 = q_{STP}, p_3 = q_{DB}$とすれば、各ノード(LS, STP, DB)の通信の規模、この場合は通信接続パターンの数、を考慮した不稼働率配分が(8)式により達成できる。

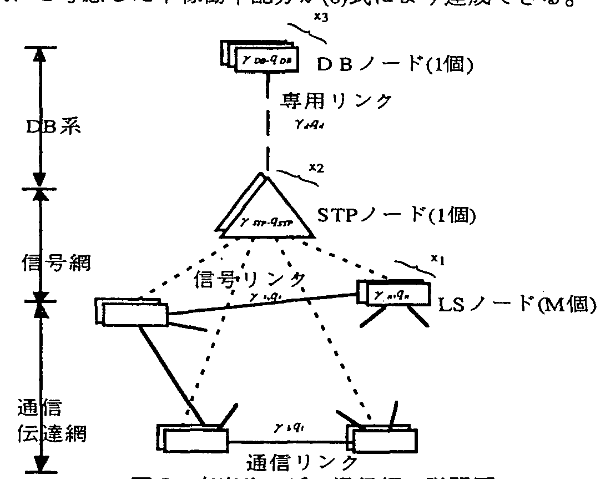

図２　高度サービス通信網の説明図

5. おわりに

荷重係数付きコスト最小化モデル、荷重係数付き不稼働率最小化モデルを提案し、最適性条件の中にユニット数x_iが陽に入らない形状での最適性条件を求め、収容規模、通信規模などを考慮した下での不稼働率配分の指針を与えた。並列ユニットの直列接続以外のシステムへの拡張、x_iを連続変数と仮定したがその妥当性検証、全網信頼度(Overall Reliability)などエンドーエンド不稼働率以外の評価尺度との関連考察、などが今後の課題である。