ネットワーク構造システムの連結安定性の定量的評価方法

1002750　政策研究大学院大学政策研究科　大山達雄

1. はじめに

ネットワーク構造を有するシステムはわれわれの周囲に数多くみられる。道路網からなる道路ネットワーク、電力の送配電網からなる電力ネットワーク、都市ガスの供給網からなる都市ガスネットワーク、水道供給網からなる水道ネットワーク、等々、われわれの日常生活の周囲にも非常に数多くのネットワーク構造を有するシステムが存在する。本稿では、ネットワークシステムの連結安定性を定義した上で、特殊ないくつかのネットワークに対してそれを明示的に示し、それらの特性に関する結果を示す。さらに実際のネットワーク構造を有するシステムを対象として、連結安定性の定量的評価を試みる。

ネットワークシステムの信頼性を定量的に評価する方法はこれまでにもいろいろな方法が提起されている。最も一般的な方法として、図1, 2に示すようなそれぞれm本の枝からなる直列系、並列系のネットワークの信頼度は、それぞれの枝の信頼度をr、すなわち不信頼度を$f=1-r$とするとき、以下のように与えられる。図1の直列系ネットワークの信頼度R_1は、ネットワークが機能するためにはすべての枝が機能しなければならないので、各枝の信頼度の積として$R_1=r^m$のように与えられる。図2の並列系のネットワークの信頼度R_2は、ネットワークが機能しなくなるのはすべての枝が機能しない場合なので、各枝の不信頼度の積$F_2=f^m=(1-r)^m$を用いて、$R_2=1-F_2=1-(1-r)^m$のように与えられる。

図1

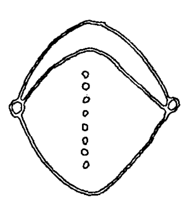

図2

2. ネットワークの連結安定性

頂点集合をV、枝集合をEとするネットワーク$N=(V,E)$において、頂点の個数、枝の本数をそれぞれ$|V|=n, |E|=m$とする。またネットワーク$N=(V,E)$の枝は無向枝とする。ネットワーク$N=(V,E)$のm本の枝のうちk本を除去した場合に得られるネットワークにおいて、異なる2つの頂点を結ぶ経路の存在本数、すなわちネットワーク$N=(V,E)$の異なる2つの頂点を結ぶ経路は全部で$\frac{n(n-1)}{2}$組だけ存在するので、これらのうち何組の経路が存在するかを$C_m^n(k)$と表す。そして$C_m^n(k)$の$C_m^n(0)$に対する割合を$S_m^n(k)$と表す。すなわち$K=\{1,2,\cdots,m\}$に対して

(1)
$$S_m^n(k)=\frac{C_m^n(k)}{C_m^n(0)} \qquad k\in K$$

とする。枝を全く除去しない場合の異なる2つの頂点を結ぶ経路の本数は$\frac{n(n-1)}{2}$であるので、$C_m^n(0)=\frac{n(n-1)}{2}$となる。したがって$S_m^n(k)$については、次の関係が成立する。

(2)
$$0\le S_m^n(k)=\frac{2C_m^n(k)}{n(n-1)}\le 1 \qquad k\in K$$

ここで注意すべきことは、一般に$S_m^n(k)$の値は1通りではない、すなわちネットワーク$N=(V,E)$に対する関数$S(N,k)=S_m^n(k)$は1価関数ではない。ネットワーク$N=(V,E)$のm本の枝のうちk本を除去する場合、除去の仕方によって得られる$S_m^n(k)$の値が異なるということである。

m本の枝からなる単一経路グラフ、星型グラフ、閉路グラフをそれぞれP_m, W_m, C_m、そしてn個の頂点からなる完全グラフK_nと表すとき、関数$S(P_3,k)$, $S(W_4,k)$, $S(C_3,k)$, $S(K_4,k)$は図3のように与えられる。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

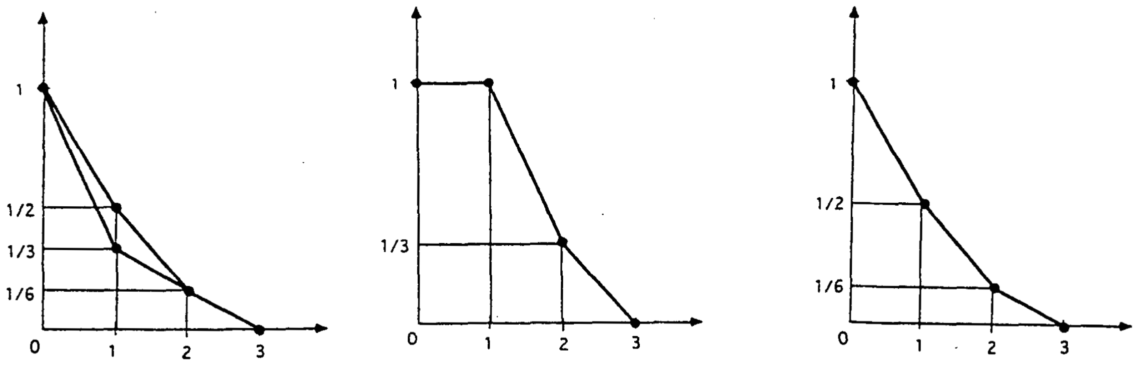

図 3

ネットワーク $N=(V,E)$ に対する関数 $S(N,k)$ の上側あるいは下側安定連結性を以下のように定義する。

$$\text{上側安定連結} \iff S^n_m(k) \geq 1-\frac{k}{m} \quad \text{for all } k$$

$$\text{下側安定連結} \iff S^n_m(k) \leq 1-\frac{k}{m} \quad \text{for all } k$$

上の図 3 から次の定理が得られる。

定理 1 P_3, W_3 は下側安定連結、C_3, K_4 は上側安定連結である。

k_1 本の枝からなる単一経路と k_2 本の枝からなる単一経路に対する 2 頂点間の経路の本数をそれぞれ $S(k_1)$ 本、$S(k_2)$ 本とすると、次の関係が成立する。

$$(3) \qquad S(k_1)+S(k_2) \leq S(k_1+k_2)$$

上の関係は

$$S(k_1)=\frac{1}{2}k_1(k_1-1) \;\; S(k_2)=\frac{1}{2}k_2(k_2-1)$$

であることから

$$\frac{1}{2}k_1(k_1-1)+\frac{1}{2}k_2(k_2-1) \leq \frac{1}{2}(k_1+k_2)(k_1+k_2-1)$$

を示すことによって得られる。なお上の関係 (3) は 2 つのグラフが単一経路より一般的に木に対しても成立することを付け加えておこう。

ここで $S^n_m(k)$ の最大値と最小値をそれぞれ以下のように表す。

$$\overline{S^n_m}(k) = \max S^n_m(k)$$
$$\underline{S^n_m}(k) = \min S^n_m(k)$$

一般に C_m, W_m, P_m に対しては、次の定理が成立する。

定理 2 P_m, W_m は下側安定連結、C_m は上側安定連結である。

同一の枝の本数 m を有する 2 つのネットワーク $N=(V,E)$ と $T=(W,F)$ に対する 2 つの関数 $S(N,k)$ と $S(T,k)$ が与えられたとき、任意の $t \in S(N,k)$ に対して $t' \leq t$, $t' \in S(T,k)$ が存在するとき

$$(4) \qquad S(N,k) \succeq S(T,k)$$

と書くことにする。さらに、すべての $k \in K = \{1,2,\cdots,m\}$ に対して式 (3) の関係が成立するとき

$$(5) \qquad S_m(N) \succeq S'_m(N') \qquad k \in K$$

と書き、ネットワーク $N=(V,E)$ はネットワーク $T=(W,F)$ より上位安定連結であるという。以上の前提に基づくと、次の定理が成立する。

定理 3

$$S_3(C_3) \succeq S_3(W_3) \succeq S_3(P_3)$$

一般に C_m, W_m, P_m に対しては、次の定理が成立する。

定理 4

$$S_m(C_m) \succeq S_m(W_m) \succeq S_m(P_m)$$

3. 応用

本稿で取り上げたネットワークの連結安定性の定量的評価方法は、現実の電力、ガス、水道、道路、情報通信等のネットワーク構造システムの連結安定性を定量的に評価するのに利用可能である。すなわちそれぞれのネットワーク構造システムの一部分が故障、破壊、破損等によって利用不可能となったとき、システム全体としての連結安定性がどのように、そしてどの程度変化するかを定量的にみようとするものである。

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会. 無断複写・複製・転載を禁ず.