ネットワークシステムの信頼性の定量的評価法
― 枝故障に対する連結性保持の信頼度計算法

01009200　今井　浩 (東京大学理学系研究科)
01207210　関根 京子 (東京大学理学系研究科)

1　ネットワーク信頼性

従来の電話網から先端のインターネットの展開を支える情報ネットワークは，社会基盤としての重要性をさらに増しており，その信頼性の定量的評価が望まれる．阿部 [1] は，通信網の安全性という観点からの信頼性設計について述べている (電力については [4] 参照)．そこでは，電話の中継局そのものも故障するモデルを検討している．しかし，中継局のような点的施設については，耐震構造にするなどの反映で中継局は安全であると仮定して対策が立てられている場合もある．

本稿では，中継局では故障が生じず，中継局間を結ぶ回線にのみ障害が生じる場合の信頼性を定量的に評価する方法について論じる．ネットワーク構造をグラフとみなすと，回線故障は枝の切断に対応する．ある回線に故障があったとしても，迂回路を使うことにより連絡可能にすることは，枝が除去されたネットワークが連結であることに対応する．最も基本的な全端子ネットワーク信頼度は，故障が確率的に生じたときのネットワークの耐故障性を確率として評価したものである．具体的には，グラフ G の各枝 e が確率 $p(e)$ で独立に消滅するとき，残った枝からなる部分グラフが連結である確率を，このグラフの全端子信頼度 $R(G)$ と呼ぶ．

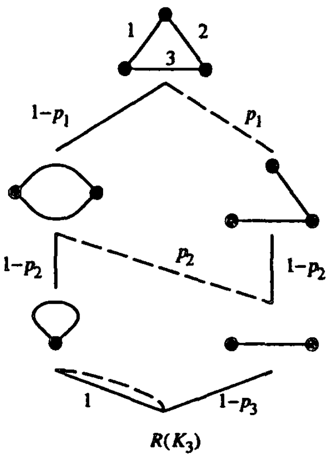
本稿では，著者らのグループが提案している BDD という構造を用いた新解法 [2, 3] を簡単な例で説明し，それが中規模の通信網モデルの信頼度 $R(G)$ を厳密に実用時間内で計算できることを述べる．さらに通常用いられるループ構造に基づいたネットワークに対して，日本の地理を反映した仮想ネットワークを考え，そのような場合でこの解法が非常に有効に働くことを示す．

2　ネットワーク信頼度の計算

定義より枝集合 E のグラフ G で枝 e の消滅確率が $p(e)$ の場合の全端子信頼度 $R(G)$ は，

$$R(G)=\sum_{A}\left(\prod_{e\in A}(1-p(e))\cdot\prod_{e\in E-A}p(e)\right)$$

となる．ここで，和は全点を連結する枝部分集合である全域枝集合 $A\subseteq E$ 全てについてとる．この信頼度 $R(G)$ は，枝 e に対して次の漸化式を満たす．ここで，G/e, $G\backslash e$ は枝 e を削除・縮約したグラフを表す．



$s_1 := 1;$

$t_1 := (1-p_1)*s_1;$
$t_2 := p_1*s_1;$

$s_1 := (1-p_2)*t_1;$
$s_2 := p_2*t_1+(1-p_2)*t_2;$

$R(K_3) := s_1+(1-p_3)*s_2;$

図 1: BDD による信頼度計算

$$R(G)=\begin{cases}(1-p(e))R(G/e) & e\text{: 橋}\\ R(G\backslash e) & e\text{: ループ}\\ p(e)R(G\backslash e)+(1-p(e))R(G/e) & \text{他の場合}\end{cases}$$

枝の順番を 1 つ固定して，この漸化式をその枝順に適用していくと，2 分木構造へ展開して $R(G)$ を計算する過程が得られる．その計算過程で，それまでに同じ枝部分集合を展開していった (展開木構造で同じレベル) のところに，全く同じグラフがたくさん現れる．それらのグラフは，同じなので当然信頼度も同じである．Imai, Sekine, Imai [3], 今井 [2] は，この展開の 2 分木構造で同じグラフを 1 つにまとめることが容易にでき (すると展開木構造は木ではなくレベル化されたグラフになる)，その構造を計算しながら信頼度 $R(G)$ が計算できることを示した．図 1 はそれを完全グラフ K_3 の場合で示したものである．図の右側が，BDD に対応した信頼度計算の直線プログラムである．詳細は [2] 参照．

この展開グラフは，論理関数を表すグラフ構造である BDD と関係しており，単に BDD と呼ぶ．この BDD は，根の 0 レベルから最終的に空グラフに対応する枝数のレベルまでからなり，途中で現れる元のグラフのマイナーの総数を BDD の点数という．同じマイナーを共有することによって，通常は倍々で増えていく展開構造をかなりコンパクトにおさえることができる．特に，地理的制約から平面構造をグラフがもつ場合等は，このアプローチが特に有効になる．

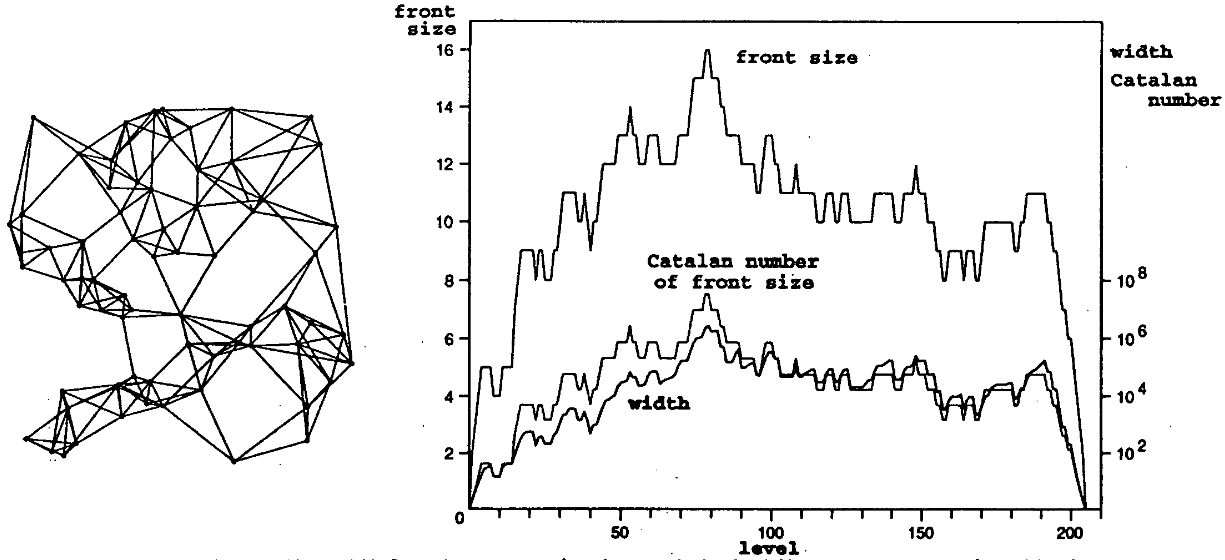


図 2: 70 点 205 枝の近接ネットワーク (左) とその信頼度計算 BDD のレベル毎の幅 (右)

3 実際の計算例

70 点の近接グラフ 図 2 に，通信網で近めのところをある程度の冗長度をもって構成したモデルである近接グラフの例を示す (構成法は [2] 参照). 点数は 70 点で，枝数 205 である．この場合は，基本的に左端点の x 座標順優先で枝を並べて展開すると，BDD での各レベルの点数 (幅) が小さくおさえられる．理論的には，もとのグラフで枝順に対して消去面 (図の front) というものを考えたとき，それの指数オーダ (正確には Catalan 数) で幅がほぼおさえられることがわかっている．このように 200 本を越えるネットワークでも漸化式を厳密に展開して信頼度関数を正確に求めることができる．

ループ構造をつないだグラフ ループ構造は，1 枝故障に対し，その枝を含まない方のルートに変更という最も簡単な操作によって耐故障性が実現でき，十分に信頼できる回線を使っているもとで現実的に使いやすいものである．日本のように地理的に細長い場合，各地域でループ構造を構築し，それらをつなぐネットワークも素直である．ここでは，本稿の投稿時点での NTT ホームページでの耐災性・信頼性向上に関するページの模式図などを例に，図 3 のような 47 点，67 枝の仮想ネットワークを考え，(a) この信頼度の計算，(b) このネットワークにさらに 1 点加え，その点を既存の点とすべて結んだグラフでの信頼度を計算，する際に，計算構造である BDD がどのくらいのサイズになるかを表 1 に示す．上述の近接グラフよりももっと小さな計算構造で厳密に信頼度が計算できることがわかり，従ってこの上での種々の最適化なども容易になっている．

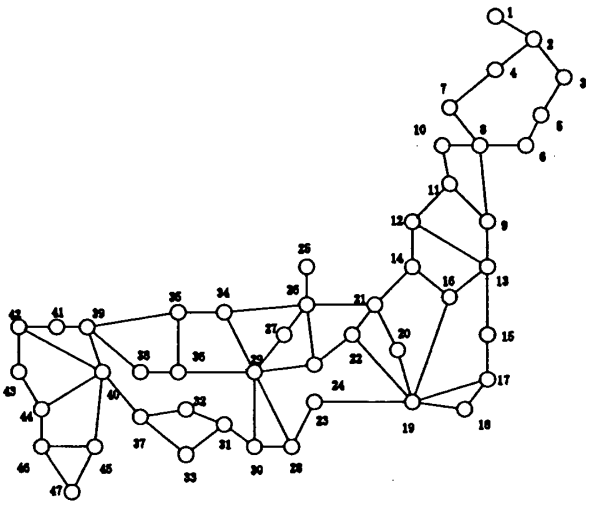


図 3: 仮想のループ連結ネットワーク

場合	点数	枝数	BDD サイズ	BDD 幅	全域枝集合数
(a)	47	67	319	13	9.6×10^{13}
(b)	48	114	2629	190	1.9×10^{32}

表 1: ループ連結ネットワークでの BDD サイズと幅

参考文献

[1] 阿部威郎: 通信網のセーフティ — 電話網の信頼性設計 —. 応用数理, Vol.9, No.4 (1999), pp.298–309.

[2] 今井浩: ネットワーク信頼度計算の周辺 — 組合せ数え上げの新展開. 離散構造とアルゴリズム V (藤重悟編), 近代科学社, 1998, pp.1–50.

[3] H. Imai, K. Sekine and K. Imai: Computational Investigations of All-Terminal Network Reliability via BDDs. *IEICE Trans. Fundamentals*, Vol.E82-A, No.5 (1999), pp.714–721.

[4] 加藤守利: 電力供給システムにおけるリスク管理. 応用数理, Vol.9, No.4 (1999), pp.310–321.