乗法計画問題は解ける！

筑波大学　久野 誉人　Kuno Takahito

1. はじめに

演算としての掛け算，割り算には本質的な違いはないが，関数の積を最適化する乗法計画法と比を最適化する分数計画法の間には極めて大きなギャップが存在する．分数計画法に関しては，Charnes と Cooper [1] による62年の古典をはじめ，すでに9百編を越える文献が出版されている [8] が，乗法計画法の方は，研究の始まりこそ66年 (Swarup [9]) と分数計画法に匹敵するものの，今もって百編の論文を数えられるかどうか疑わしい．問題への需要の差を反映しているとも考えられるが，乗法計画問題が最も単純なものでさえ手に負えない (と信じられている) 多極大域的最適化に属している点も一つの理由であろう．しかし，計算機資源の価格破壊が進んだ今日，「大域的最適化問題＝解けない」という図式は最早，過去のパラダイムにすぎない．本稿では，解けるという事実が問題への新たな需要を産むことを期待しつつ，乗法計画法における大域的最適化の現在について報告する．

2. 分数計画問題と乗法計画問題

最もシンプルな2つの問題について考えよう:

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & f_1(x) = (c_1^{\mathrm{T}}x + \gamma_1)/(c_2^{\mathrm{T}}x + \gamma_2) \\ \text{条　件} & x \in D, \end{array}\right. \tag{1}$$

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & f_2(x) = (c_1^{\mathrm{T}}x + \gamma_1)\cdot(c_2^{\mathrm{T}}x + \gamma_2) \\ \text{条　件} & x \in D. \end{array}\right. \tag{2}$$

ただし，D は $m \times n$ 行列 A と m ベクトル b が定義する有界な凸多面体 $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ とし，簡単のため，

$$c_i^{\mathrm{T}}x + \gamma_i > 0, \quad \forall x \in D \tag{3}$$

を仮定しておこう．この条件のもとでは，どちらの目的関数も準凹，つまり任意の2点 $x, y \in D$ に対して

$$f[\lambda x + (1-\lambda)y] \geq \min\{f(x), f(y)\}, \quad \forall\lambda \in [0,1] \tag{4}$$

を満たす．このことは，(1), (2) とも D の端点の中に最適解が存在することを意味するが，端点の数は恐ろしく多いので，効率のよいアルゴリズムを設計しようとする際にはネガティブな情報でしかない．ところが，分数計画問題 (1) の方はちょっとした変換で線形計画問題に書き換えることができ，しかも変数が1つと制約式が $n+1$ 個増えるだけ [1] なので内点法を使えば多項式時間のうちに答が求められる．解の候補となる D の端点の数は問題規模 (m, n) の指数関数であるのに，どうして内点法のような局所的最適化によって解が得られるかと言うと，(1) の目的関数 f_1 は準凹であると同時に準凸関数でもあるからだ．残念ながら，乗法計画問題 (2) の目的関数 f_2 は (3) の条件下で準凸性を満たさない．従って，最適解を見つけだすには候補の一つ一つを吟味しなければなず，最悪の場合には指数時間の計算量が必要となる [7]．

3. 乗法計画問題も多項式時間で解ける

しかし，最悪計算量が指数時間だからと言って悲観するのはまだ早い．シンプレックス法も指数時間アルゴリズムだが，その効率性を否定する人はいないだろう．実は (2) の乗法計画問題も，そのシンプレックス法を使って平均的には多項式時間で大域的に最適化できる．

補助変数 ξ を導入して

$$F(x, \xi) = (c_1^{\mathrm{T}}x + \gamma_1)\xi + (c_2^{\mathrm{T}}x + \gamma_2)/\xi \tag{5}$$

と定義すれば，任意の $x \in D$ に対して

$$\min\{F(x, \xi) \mid \xi > 0\} = 2\sqrt{(c_1^{\mathrm{T}}x + \gamma_1)(c_2^{\mathrm{T}}x + \gamma_2)}$$

が成り立つ．従って，問題 (2) は1変数関数

$$\phi(\xi) = \min\{F(x, \xi) \mid x \in D\} \tag{6}$$

の $\xi > 0$ における大域的最小点 ξ^* を求める問題に等価である．ところが (6) の右辺はただの線形計画問題なので，ξ^* は感度分析などで使われるパラメトリック費用シンプレックス法で簡単に見つけだすことができる．実際，$\lambda = \xi/(\xi + 1/\xi)$ とおき，その値をゼロから1まで変化させながら線形計画問題

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \lambda(c_1^{\mathrm{T}}x + \gamma_1) + (1-\lambda)(c_2^{\mathrm{T}}x + \gamma_2) \\ \text{条　件} & x \in D \end{array}\right.$$

を解けば，ξ^* とともに ϕ の局所最小点のすべてを知ることができる．このパラメトリックシンプレックス法に必

要な計算量は，平均的に (m,n) の多項式であることが示されており [5]，また経験的にも同規模の線形計画問題を高々 2 題解く程度であることが確かめられている [4].

4. 乗法計画問題はまだ解ける

問題 (2) の解けることがわかれば，今度は 1 つの比に分母と分子しかない分数計画問題では考えられないタイプの乗法計画問題も解きたくなる:

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{p}(\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\gamma_i) \\ \text{条　件} & \boldsymbol{x} \in D. \end{array}\right. \tag{7}$$

再び (3) を仮定すれば f は準凹関数であるが，$\log f$ は狭義凹関数なので既存の様々な大域的最適化手法を適用することができる [3]．さらに p 個の補助変数 ξ_i を導入すれば，(7) は分離可能凹最小化問題

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \psi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{p}\log\xi_i \\ \text{条　件} & \boldsymbol{\xi} \in \Delta \end{array}\right. \tag{8}$$

に帰着する．ここで Δ は，$\boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\delta_i$ が定義する空間への D の射影で，

$$\Delta = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^p \mid (\exists \boldsymbol{x} \in D)\ \xi_i = \boldsymbol{c}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}+\delta_i,\ i=1,\ldots,p\} \tag{9}$$

によって定まる p 次元凸多面体である．

現段階の大域的最適化では，(8) がもつような分離可能性こそが大規模問題を解く鍵となっている．この種の凹最小化問題に対し，Falk と Soland は 69 年に整数計画法や組合せ最適化でお馴染みの分枝限定法を提案している [2]．彼らの方法は，まず Δ を包み込む矩形 $\Omega = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{l} \le \boldsymbol{\xi} \le \boldsymbol{u}\}$ を定義し，それを分枝操作によって小さな矩形 $\Omega_k = \{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^m \mid \boldsymbol{l}^k \le \boldsymbol{\xi} \le \boldsymbol{u}^k\}$ に分割しながら，生成される子問題

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \psi(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{p}\log\xi_i \\ \text{条　件} & \boldsymbol{\xi} \in \Delta\cap\Omega_k \end{array}\right. \tag{10}$$

を解いていく．もちろん，(10) も (8) と同じ構造をもつ凹最小化問題であるので直ちには解けず，代わりに ψ の各凹関数 $\log\xi_i$ を区間 $[l_i^k, u_i^k]$ で

$$\bar{\psi}_i(\xi_i) = \frac{\log u_i^k - \log l_i^k}{u_i^k - l_i^k}\xi_i + \frac{u_i^k\log l_i^k - l_i^k\log u_i^k}{u_i^k - l_i^k} \tag{11}$$

と線形近似した問題

$$\left|\begin{array}{ll} \text{最小化} & \bar{\psi} = \sum_{i=1}^{p}\bar{\psi}_i(\xi_i) \\ \text{条　件} & \boldsymbol{\xi} \in \Delta\cap\Omega_k \end{array}\right. \tag{12}$$

を解く．これは線形計画問題なので簡単に解けるが，

$$\bar{\psi}_i(\xi_i) \le \log\xi_i, \quad \forall\xi_i \in [l_i^k, u_i^k]$$

が成り立つので，その最適値は (10) の下界値となり，限定操作に用いることができる．

30 年も昔の方法だが下界値強化を工夫することで，わずか 150 MHz のワークステーション上でも $(m,n,p) = (260,150,10)$ の問題 (7) を 40 秒程で大域的に最適化することができる [6]．大域的最適化と聞くと及び腰になりがちだが，乗法計画問題は解けるのである．様々な分野への応用を期待したい．

参考文献

[1] Charnes, A. and W.W. Cooper, "Programming with linear fractional functions," *Naval Research Logistics Quaterly* **9** (1962), 181 – 186.

[2] Falk, J.E. and R.M. Soland, "An algorithm for separable nonconvex programming problems," *Management Science* **15** (1969), 550 – 569.

[3] Horst, R. and H. Tuy, *Global Optimization: Deterministic Approaches*, Springer (Berlin, 1993).

[4] Konno, H. and T. Kuno, "Linear multiplicative programming," *Mathematical Programming* **56** (1992), 51 – 64.

[5] Konno, H., T. Kuno and Y. Yajima, "Parametric simplex algorithm for a class of NP-complete problems whose average number of steps are polynomial," *Computational Optimization and Application* **1** (1992), 227 – 239.

[6] Kuno, T., "A finite branch-and-bound algorithm for linear multiplicative programming," Technical Report ISE-TR-99-159, University of Tsukuba (Ibaraki, 1999).

[7] Matsui, T., "NP-hardness of linear multiplicative programming and related problems," *Journal of Global Optimization* **9** (1996), 113 – 119.

[8] Schaible, S.,「分数計画法」, S.I. Gass, C.M. Harris (eds.), 経営科学 OR 用語大事典, 朝倉書店 (東京, 1999).

[9] Swarup, K., "Programming with indefinite quadratic function with linear constraints," *Cahiers du Centre dÉtude de Recherche Operationelle* **8** (1966), 132 – 136.