一次元都市における最適な集約・分配輸送システムに関する研究

02900310　筑波大学　社会工学研究科　*渡部大輔　WATANABE Daisuke
01205430　筑波大学　社会工学系　鈴木　勉　SUZUKI Tsutomu

1. はじめに

都市内で物を運ぶときに，最短距離で運んだ方が輸送にかかる時間や費用を短くすることができる．しかし，輸送需要が複数箇所で発生・集中する場合，品目の特性によっては輸送規模の経済性が利くため，多少遠回りをしてもまとめて運んだ方が効率が高いこともある．これは，現状の郵便物などの輸送においても多階層のシステムが見られることからも分かる．

本研究では，一次元の有限領域において，輸送需要が一様に発生し都市の中心に向かって集中する時 (many-to-one demand)，輸送費用に規模の経済性が存在する場合に，費用が最小という意味での最適な階層的輸送システムの「輸送階層数」と「階層別施設数」を求め，規模の経済性を表すパラメータの影響について考察する．なお，本論は一点から発生し一様に分配する需要 (one-to-many demand) についても適用可能である．

2. モデルの概要と輸送費用の定式化

全長 L の線形都市において，n_0 個の施設が一様に分布しているとする．この都市では図1のように，m 階層で n_m 個の均等に配置された階層施設に集約され，M 階層の輸送を経ることによって n_M 個の最上階層施設へ運ぶことを考える．施設数は $n_0 \gg n_1 \gg \cdots \gg n_m \gg \cdots \gg n_M$ を満たすとする．n_m は本来自然数であるが，十分大きいと仮定して連続量近似して考える．

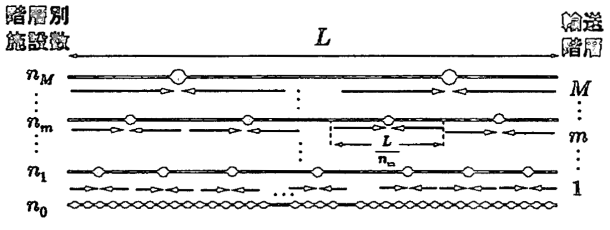

図 1: 線形都市での many-to-one 輸送の概要

2.1 m 階層輸送での輸送距離

m 階層施設への輸送距離は，$m-1$ 階層の施設数密度 $\frac{n_{m-1}}{L}$ とその階層の施設からの距離 l の積和に m 階層の施設数を乗じたものとなるので，$n_m \ll n_{m-1}$ より以下のように求められる．

$$d_m = n_m \ 2\int_0^{\frac{L}{2n_m}} \frac{n_{m-1}}{L} l dl = \frac{Ln_{m-1}}{4n_m} \tag{1}$$

2.2 m 階層輸送での単位輸送費用

m 階層輸送での輸送量の単位は，$m-1$ 階層輸送までに集約した $\frac{n_0}{n_{m-1}}$ である．単位距離当輸送費用は

$$C(\alpha) = \left(\frac{n_0}{n_{m-1}}\right)^{\alpha} \tag{2}$$

となると仮定する．α は規模の経済性を表すパラメータ $(0 \le \alpha \le 1)$ であり，輸送品目の特性に依存すると考えられる．図2のように α が小さいほど輸送量に対しての規模の経済性が利き，まとめて輸送するメリットが増すことを表す．

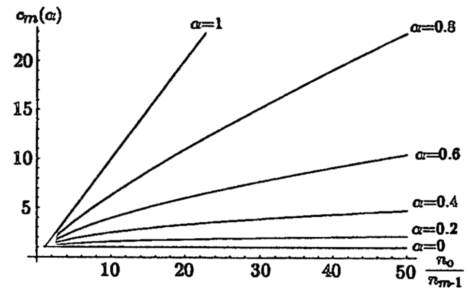

図 2: 輸送量と輸送費の関係

2.3 総輸送費用

総輸送費用は，輸送距離と単位輸送費用の積和で求められるので，以下のようになる．

$$C(\alpha) = \sum_{m=1}^{M} d_m C(\alpha) = \frac{L}{4}\sum_{m=1}^{M} \frac{n_{m-1}}{n_m}\left(\frac{n_0}{n_{m-1}}\right)^{\alpha} \tag{3}$$

3. 規模の経済性による最適階層数と施設数

3.1 輸送費が輸送量の規模によらない場合 (α=0)

式 (3) に α=0 を代入すると，

$$C(0) = \frac{L}{4}\sum_{m=1}^{M} \frac{n_{m-1}}{n_m} \tag{4}$$

となり，この式が最小となる必要条件 $\frac{\partial C(0)}{\partial n_m} = 0$ から

$$\frac{n_m}{n_{m+1}} = \frac{n_{m-1}}{n_m}, \quad m = 1, 2, \cdots, M-1$$

が得られ，最適な階層別施設数 $n_m^{\dagger}$ は

$$n_m^{\dagger} = n_0\left(\frac{n_M}{n_0}\right)^{\frac{m}{M}} \tag{5}$$

となる．式 (3) に代入すると総輸送費用 $C(0)$ は

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

$$C(0)=\frac{L}{4}M\left(\frac{n_0}{n_M}\right)^{\frac{1}{M}} \tag{6}$$

となる．この式が最小となる必要条件 $\frac{\partial C(0)}{\partial M}=0$ から，最適階層数

$$M^*=\log\frac{n_0}{n_M} \tag{7}$$

が得られる．すなわち，最上階層と最下階層の施設数比の対数となる．式 (5) から最適な各階層別施設数は，

$$n^*_m=n_0\mathrm{e}^{-m} \tag{8}$$

となる．最適な階層数での総輸送費用は式 (6) より，

$$C^*(0)=\frac{L}{4}\mathrm{e}\log\frac{n_0}{n_M} \tag{9}$$

3.2 規模の経済性が全くない場合 (α=1)

式 (3) に α=0 を代入すると，

$$C(1) \;=\; \frac{Ln_0}{4}\sum_{m=1}^{M}\frac{1}{n_m} \tag{10}$$

となるが，n_m についての増加関数なので途中に集約輸送を行わない直行輸送 ($M^*=1$) となる．

3.3 規模の経済性が利く場合 ($0<\alpha<1$)

式 (3) が最小となる必要条件 $\frac{\partial C(\alpha)}{\partial n_m}=0$ から

$$\frac{n_m}{n_{m+1}}=\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{n_{m-1}}{n_m}\right)^{1-\alpha},m=1,2,\cdots,M-1$$

が得られ，最適となる階層別施設数は，

$$n^{\dagger}_m=n_0(1-\alpha)^{\frac{m}{\alpha}-\frac{M}{\alpha}\frac{1-(1-\alpha)^m}{1-(1-\alpha)^M}}\left(\frac{n_M}{n_0}\right)^{\frac{1-(1-\alpha)^m}{1-(1-\alpha)^M}} \tag{11}$$

となる．式 (3) に代入すると，総輸送費用は，

$$\begin{aligned}C(\alpha) \;=\; & \frac{L}{4}(1-\alpha)^{\frac{(1-\alpha)^M}{1-(1-\alpha)^M}M-\frac{1-\alpha}{1-(1-\alpha)}}\\ & \frac{1-(1-\alpha)^M}{1-(1-\alpha)}\left(\frac{n_0}{n_M}\right)^{\frac{1-(1-\alpha)}{1-(1-\alpha)^M}}\end{aligned} \tag{12}$$

となる．上式が最小となる必要条件 $\frac{\partial C(\alpha)}{\partial M}=0$ より，最適階層数は，

$$M^*=-\frac{\alpha\log\frac{n_0}{n_M}}{\log(1-\alpha)} \tag{13}$$

となり，式 (7) も同様な形になる．式 (11) から最適な各階層別施設数は，

$$n^*_m=n_0(1-\alpha)^{\frac{m}{\alpha}} \tag{14}$$

となり，式 (12) とより最適な階層数での総輸送費用は

$$C^*(\alpha)=\frac{L}{4}\frac{(1-\alpha)^{1-\frac{1}{\alpha}}}{\alpha}\left\{\left(\frac{n_0}{n_M}\right)^{\alpha}-1\right\} \tag{15}$$

4. 最適な輸送システムの計算例

L=1,n_M=1 の時 (一般性は失われない) の，α と n_0 の変化による最適な 階層数 M^* と階層別施設数 n^*_m について考察する．

4.1 規模の経済性による比較

$n_0=1000$ として α を変化させるとき，式 (5) と式 (14) から各階層での施設数は図 3 のようになる．施設数 $\log n^*_m=0$ のとき輸送階層数 $m=M^*$ となり，これに最も近い整数が現実には最適階層数となる．α が小さく，輸送量に対して費用が逓減する程，最適な輸送階層数は増加，各階層別施設数も多くなり，こまめに積み替えた方が良いことを示している．

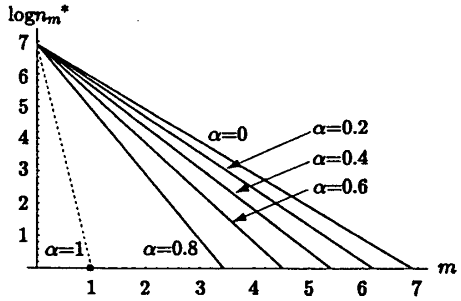

図 3: 階層数 m と $\log n^*_m$ の関係 ($n_0=1000$)

4.2 輸送需要密度による比較

n_0 を変化させ，輸送需要の密度を変えた場合の最適な輸送階層数 M^* は，式 (7) と式 (13) より図 4 のようになる．輸送需要の密度が高くなるにつれて最適な階層数は増加するが，その増え方は $\log n_0$ に比例することがわかる．

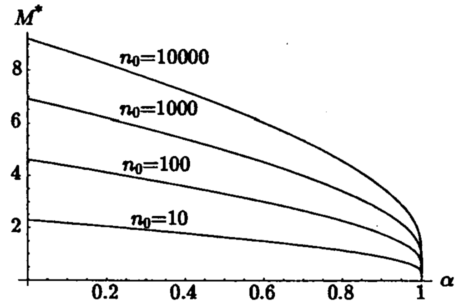

図 4: α と最適輸送階層数 M^* の関係

5. おわりに

輸送における規模の経済性が利くと，階層数の多い輸送システムがより望ましくなることが理論的に明らかになった．現実の α の計測や，輸送費用が輸送量のみならず輸送距離によっても逓減する場合，二次元平面での定式化などは今後の課題である．

参考文献

1) Newell, G.F. (1973): Scheduling, location, transportation, and continuum mechanics; some simple approximations to optimization problems, *SIAM J. Appl. Math.*, 25, 3, 346-360.

2) 家田仁 (1997): Hub-Spokes/Point-to-Point や集約型／直行型輸送など階層的輸送システムの均質無限平面上における定式化と解法, 土木計画学研究・論文集, 14, 773-782.

3) 笠原一人・古山正雄 (1998): 最短木および階層を有する木の長さに関する考察, 日本建築学会計画系論文集, 504, 155-161.

4) 鈴木勉・川口明子 (1998): 線分都市内での輸送における規模の経済性と最適地域単位, 日本オペレーションズ・リサーチ学会 1998 年度秋季研究発表会アブストラクト集, 24-25.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．