2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

# AHPにおける一対比較の整合性の評価

01007500 慶応義塾大学 ＊小澤 正典 OZAWA Masanori
01104400 法政大学 加藤 豊 KATO Yutaka

## 1 整合性

AHPにおける一対比較において，その比較が整合性をもって行われることを期待することは難しい．そこで，その比較がどの程度整合性をもって行われたかを調べる必要がある．本研究では，一対比較行列の持つの整合性について考察する．

AHPにおける一対比較において，項目 $i$，$j$ と $k$ の比較において，つぎの式が満たされることが整合性を持つための条件である．

$$a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad \text{for } k = 1, \ldots, n$$

ここで，$a_{ij}$ は一対比較値．

このとき，つぎの定理が成立する．

**定理1．** 一対比較行列 $\{a_{ij}\}$ において，$a_{ij} > 0$ であるならばつぎのことは同値である．

(a) 一対比較行列の任意の要素 $a_{ij}$ で，

$$a_{ij} = a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad \text{for } k = 1, \ldots, n$$

である．

(b) 一対比較行列の任意の要素 $a_{ij}$ で，

$$a_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot a_{kj}, \quad \text{for } i, j = 1, \ldots, n$$

$$a_{ii} = 1, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n$$

である．

(c) 一対比較行列の最大固有値が $n$ であり，

$$a_{ii} = 1, \quad \text{for } i = 1, \ldots, n$$

である．

(d) ある $w_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$ が存在して，

$$a_{ij} = w_i / w_j, \quad \text{for } i, j = 1, \ldots, n$$

である．

証明：略

これらのどれを使用しても，整合性を測ることができる．例えばサーティの整合性は，定理における3番目のことを使用して整合性を測るものである．

また，4番目の方法では，一対比較行列に対して各要素 $a_{ij}$ を $w_i/w_j$ である意味において近似する．そして，その近似したときの誤差をその整合度として利用する．例えば，幾何平均法ならば，

$$F(A, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\ln a_{ij} - \ln w_i - \ln w_j)^2$$

として関数値 $\min_w F(A, w)$ をその整合度とすることができる．

ここで，各要素における差を計算する際に，$a_{ij} - w_i/w_j$ だけでなく，

(1) $$a_{ij}^r - \left(\frac{w_i}{w_j}\right)^r$$

(2) $$\left(a_{ij} \cdot \frac{w_j}{w_i}\right)^r - 1$$

として計算してもよい．

## 2 特定の誤差を持つ比較行列

ある一対比較行列 $A$ の整合性を定めるために，定理1における各項目での整合性に対して，つぎのような評価値を定める．

(a) この場合，各要素 $a_{ij}$ について $n$ 通り調べなければならないので，

$$f_a(A) = \left( \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (a_{ij} - a_{ik} \cdot a_{kj})^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad r \geq 1$$

として計算する．本研究では，$r = 2$．

(b) 2番目は一対比較行列のベキ等性に注目したものであるが，各要素の計算をまとめて，

$$f_b(A) = \| \frac{1}{n} A^2 - A \|$$

とする．ここで，ノルムは一般のノルムでよい．

(c) このときは，行列 $A$ の最大固有値を $\lambda_{\max}$ として，

$$f_c(A) = \lambda_{\max} - n$$

とする．

(d) ウェイトの推定ベクトル $w$ を，どのように推定するかによってその目的関数が違う．そして推定したときの残差を整合度として考える．

$$f_d(A) = \min_w F(A, w)$$

一対比較行列の整合性を調べるには，他にもいろいろな方法がありえるが，基本的には前に述べた方法によるものである．そこで，これらの方法の特徴について調べることにする．

そこで，つぎのような特定要素 ($a_{12}$ と $a_{21}$ 要素) のみに誤差を持つ一対比較行列 $B = \{b_{ij}\}$ を考える．

$$b_{ij} = \begin{cases} \delta \cdot w_1 / w_2, & i = 1,\ j = 2 \\ w_2 / (\delta \cdot w_1), & i = 2,\ j = 1 \\ w_i / w_j, & \text{その他}. \end{cases}$$

このときの各整合性の評価方法における値はつぎのようになる．

(a)

$$f_a(B) = \left[ \frac{1}{(n-2)C} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(b_{ij} - b_{ik} \cdot b_{kj}\right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[ \frac{(\delta-1)^2}{C} \left( \alpha_1 + \frac{\beta_1}{\delta^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

ここで，$\alpha_1, \beta_1$ はある定数（$w$ による）．

(b) ノルムはフロベニウス・ノルムを使用する．

$$f_b(B) = \| \frac{1}{n} B^2 - B \|_F$$

$$= \left[ \frac{(\delta-1)^2}{C} \left( \alpha_2 + \frac{\beta_2}{\delta^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

(c) 最大固有値はつぎの 3 次方程式の実根．

$$\lambda^3 - n\lambda^2 - (n-2)(\frac{1}{\delta} + \delta - 2) = 0$$

よって，その解

$$\lambda = \frac{n}{3} + \frac{2^{\frac{1}{3}} n^2}{3(27A + 2n^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{A}\sqrt{27A + 4n^3})^{\frac{1}{3}}}$$

$$+ \frac{(27A + 2n^3 + 3\sqrt{3}\sqrt{A}\sqrt{27A + 4n^3})^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}}}$$

が得られる．ここで，$A = (n-2)(\frac{1}{\delta} + \delta - 2)$ である．

$$f_c(A) = (\lambda - n)/(n-1)$$

(d) 幾何平均の場合について，ここでは考察する．

$$f_d(A) = \exp \left[ \left\{ \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left( \ln b_{ij} - \ln(w_i/w_j) \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] - 1$$

$$= \exp \left[ \left\{ \frac{2(n-2)}{n \cdot C} (\ln(\delta))^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \right] - 1$$

ここで，$C = n(n-1)$ で，これは一対比較行列に逆数の関係があり，行列の次数についての調節のために導入した．

このような一対比較行列の場合，整合性の値として $\delta$ が小さい場合を調べてみると，(a),(b),(c),(d) は定数倍程度ちがうだけで，オーダー的な違いはなく，どの方法も整合性を測る尺度として利用できることが分かる．しかし，$\delta$ が大きい値になると (c) と (d) の方法においては違ってくる．

## 3 シミュレーション

前述の一対比較行列は特定の要素のみに誤差を導入したものであるが，各要素 (非対角要素) に誤差がある場合 ($a_{ij} = \varepsilon_{ij} w_i / w_j$) について，シミュレーションを行った．図 1 は，誤差 $\varepsilon_{ij}$ が対数正規分布に従う場合 ($\varepsilon_{ij} = \exp(\gamma)$，$\gamma$ が $N(0, \sigma^2)$ に従う) であり，図 2 は，誤差 $\varepsilon_{ij}$ が

$$\varepsilon_{ij} = \sqrt{1 + \gamma^2/4} + \gamma/2 \tag{1}$$

で与えられるものである ($\gamma$ が $N(0, \sigma^2)$ に従う)．

なお，シミュレーションは，各標準偏差 $\sigma$ について 10000 回ずづ行った．

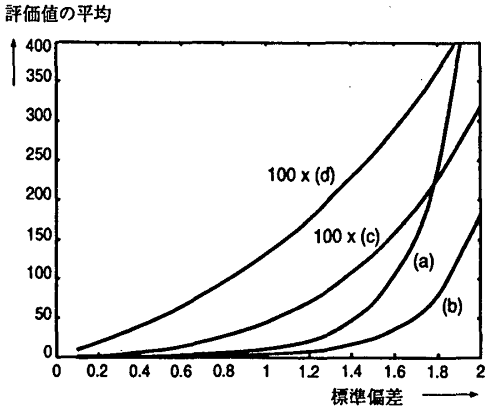


図: 1：整合性の評価値の平均
(対数正規分布)

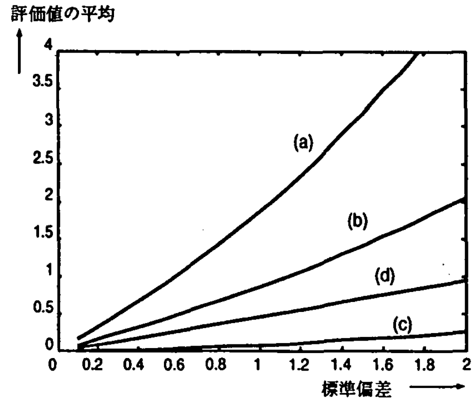


図: 2：整合性の評価値の平均
(式 (1) で与えられる誤差分布)

## 4 まとめ

本研究では，整合性を評価する際に使用可能な方法についてその性質を調べた．その結果，4 つの方法ともに大きな違いがないことが分かったが，誤差が大きいときには評価方法 (c),(d) ではその評価値が他の方法に比べ小さいので，そのことを考慮する必要がある (図 1 では 100 倍して表示)．また，評価方法の (b) は一対比較行列のベキ等性を調べるためのものであり，誤差分布が式 (1) の場合には，その標準偏差と評価値が近くなる (図 2 参照) ので，誤差の評価に適している．この方法は，一般に使用される (d) の方法と違って，ウェイトの推定とは別に計算できるので，行列そのものが持つベキ等性を表す有効な手段の 1 つである．

## 参考文献


[1] Saaty,T.L. “Eigenvector and logarithmic least squares”, European Journal of OR, Vol.48, pp.156-160, 1990.

[2] 加藤豊，小澤正典,“調和平均法による AHP”, 第 58 回品質管理学会研究発表会要旨集, pp59-62, 1998.

[3] Kato,Y, Ozawa,M “The characteristics of the consistency function of the general mean method”,77-82, Proceedings of ISAHP'99, 1999.