次数制限付最短路木に関する諸問題

杉山洋右[†](入会予定)　伊藤大雄[‡](01009550)　上原秀幸　横山光雄
豊橋技術科学大学情報工学系

1　はじめに

無向グラフ $G=(V,E)$, V: 節点集合, E: 枝集合, に対して、次数制限 $\delta: V \rightarrow Z_0^+$, 枝長 $l: E \rightarrow R_0^+$ (但し、Z_0^+, R_0^+ はそれぞれ、0 以上の自然数の集合、0 以上の実数の集合) を考える。

また、$s \in V$ と s を含む木 T について、T 上の任意の節点 v に対し、s と v の T 上の唯一の経路の長さ (含まれる枝の長さ $l(e)$ の和) を $dist_T(v)$ と表わし、T を s を根とする出樹木と考えた時の節点 v の T における子の数を $d_T(v)$ と表わす。

ここで、与えられた G, δ, l, s に対し、s を根とし、任意の節点に対して $d_T(v) \leq \delta(v)$ であるような最短路木が存在するか否かを判定し、存在するならばそのうちのひとつを出力するような問題を次数制限付最短路木問題と呼ぶことにする。

本問題に対し、$O(\Delta^{\frac{3}{2}} m\sqrt{n})$ 時間アルゴリズムが存在することがわかっている [1]。(但し n: 節点数, m: 枝数, $\Delta = max\{\delta(v)|v \in V\}$ とする)

この問題は、情報ネットワークにおいて、ひとつのノードから複数のノードに情報を配信する場合の、配信経路を求める問題に応用がある。各ノードは親に当たるノードから情報を受信し、子に当たるノードに必要数情報を複製し、配信する。

そこで、重要になるのが、情報の配信にかかる送信時間と、各ノードのコピー数であるが、この条件はそれぞれ、根から各点までの経路の長さ、各点の次数制限に相当する。

次数制限付最短路木問題では、条件を満たす経路が存在しなければ、なにも出力されないが、実際には、そういった場合次善の経路を得たい。こういった実用上の観点から、距離制限を緩めた場合、次数制限を緩めた場合、さらに受信ノードが全ノードではなく、与えられた一部のノードが受信できれば十分であるような場合について考える必要がある。

そこで、本稿では、以下の問題を扱う。

- 次数制限付準最短路木問題
  入力: $G=(V,E)$, δ, l, s, l_0.
  質問: s を根とし、$d_T(v) \leq \delta(v)$ かつ、$\sum_{v \in V} dist_T(v) \leq l_0$ であるような、全域木 T は存在するか？
- 緩次数制限付最短路木問題
  入力: $G=(V,E)$, δ, l, s, k.
  質問: s を根とし、$\sum_{v \in V} max\{d_T(v)-\delta(v), 0\}$ が k 以下であるような最短路木 T は存在するか?
- 次数制限付部分最短路木問題
  入力: $G=(V,E)$, δ, l, s, $R \subseteq V$.
  質問: s を根とし、$d_T(v) \leq \delta(v)$ であり、R をすべて含むような最短路木 T ($V-R$ の節点は含まなくてもよい) は存在するか？

なお、以下では、$d(v)$ を G 上の各節点の次数とする。

2　各問題の計算の複雑さ

定理 1 次数制限付準最短路木問題は NP 完全である。

証明 既知の NP 完全問題である支配集合問題 (DOMINATING SET) [2] を帰着する。

支配集合問題とは、与えられた数 (k) 以下の節点部分集合で、全ての節点に対し、どれか一つの節点が隣接しているようなものが存在するかを問う問題である。

支配集合問題の問題例を $\{G=(V,E), k\}$ とする。このときの次数制限付準最短路木問題の問題例を $\{G'=(V',E'), \delta, l, s, l_0\}$ とし、
$V' = V \cup \{s\}$,

[†] sugi@yilab.tutics.tut.ac.jp
[‡] ito@tutics.tut.ac.jp

$E' = E \cup \{(s,v)|v \in V\}$,
$\delta(s) = k$,
$\delta(v) = d(v)\ (v \in V)$,
$l(e) = 1\ (e \in E)$,
$l_0 = 2|V| - k$,
とすると両者の解が一致する (図 1, 2参照)。 □

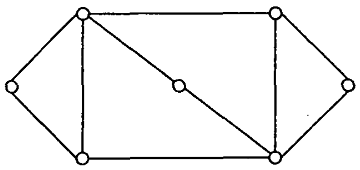

図 1: 支配集合問題の問題例

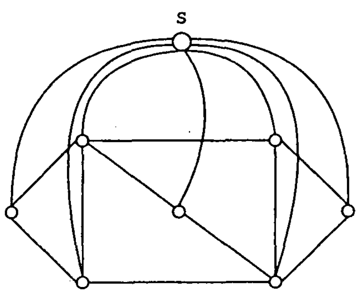

図 2: 次数制限付準最短路木問題の問題例

定理 2 緩次数制限付最短路木問題は $O(nD(m + n\log nD))$ 時間 (但し、n : 節点数, m : 枝数, $D = max\{d(v)|v \in V\}$) で解ける。

証明 [1] の手法を最小コストマッチングを用いて拡張することによって得られる。詳細は略す。 □

定理 3 次数制限付部分最短路木問題は NP 完全である。

証明 既知の NP 完全問題である節点カバー問題 (VERTEX COVER) [2] を帰着する。

節点カバー問題とは、与えられた数 (k) 以下の節点部分集合で、全ての枝に対し、どれか一つの節点が隣接しているようなものが存在するかを問う問題である。

節点カバー問題の問題例を $\{G = (V,E),k\}$ とする。また、$e \in E$ の両端点を x_e, y_e と書く。このときの次数制限付部分最短路木問題の問題例を $\{G' = (V',E'),\ \delta,\ l,\ s,\ R\}$ とし、

$V' = V \cup R \cup \{s\}$,
$R = \{v_e|e \in E\}$,
$E' = \{(x_e,v_e),(v_e,y_e)|e \in E\} \cup \{(s,v)|v \in V\}$,
$\delta(s) = k$,
$\delta(v) = d(v)\ (v \in V)$,
$\delta(v) = 0\ (v \in R)$,
$l(e) = 1\ (e \in E)$,
とすると両者の解が一致する (図 3, 4参照)。 □

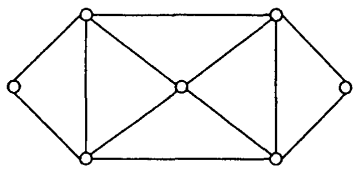

図 3: 節点カバー問題の問題例

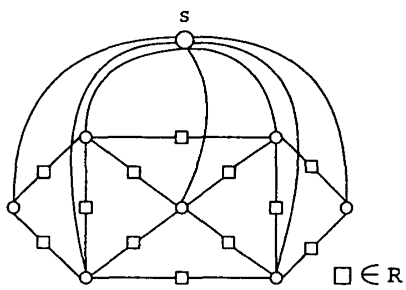

図 4: 次数制限付部分最短路木問題の問題例

3 まとめ

本稿では、次数制限付準最短路木問題、次数制限付部分最短路木問題は NP 完全であり、緩次数制限付最短路木問題には、$O(nD(m + n\log nD))$ 時間アルゴリズムが存在することを明らかにした。

参考文献

[1] 伊藤大雄, 藤田正人, 上原秀幸, 横山光雄, "次数制限のある最短路木作成アルゴリズム," 情報処理学会研究報告 (アルゴリズム研究会), vol. 99, no. 8, pp.1–7, 1999.

[2] M. Garey and D. Johnson, Computers and Intractability, W. H. FREEMAN AND COMPANY, San Francisco, 1978.