総頂点間経路長を最小にする 完全K分木の深さ同一全頂点対の隣接化

01204874　流通科学大学 情報学部　＊澤田　清　SAWADA Kiyoshi
01012514　流通科学大学 情報学部　宇野　斉　UNO Hitoshi

1．はじめに

会社などの組織の階層構造は，構成主体（個人や部，課など）を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木と考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは上下の主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する [1].

筆者らは，すでに，高さ H の完全2分木の同じ深さの頂点間に辺を1本追加したときの，全頂点間の最短経路の長さの総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）を最小にする追加辺の深さ N を求めた [2]. 本研究では，より一般化した完全 K 分木に対して，ある深さのすべての頂点間に辺を追加（すなわち，ある深さのすべての頂点対を隣接化）した場合に，総頂点間経路長を最小にする隣接の深さを求めることを考える．これは，組織内の同じ層全体での会合などによる追加的な関係形成を行う場合に，どの層で関係を結ぶのが最も効果的であるかという問題に対応している．

2．総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，前述したように，高さ $H(H=1,2,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ の，深さ $N(N=1,2,\cdots,H)$ のすべての頂点対を隣接化する．ただし，完全 K 分木は，すべての葉が同じ深さをもち，すべての内部頂点の次数が K であるような K 分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．

このとき，総頂点間経路長が最小となる N を求める．ここでは，高さ H の完全 K 分木の深さ N の全頂点対を隣接化することにより，隣接化前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されたかを定式化する．以後，これを総頂点間短縮経路長と呼び，$S(N)$ と表すこととすると，

$$
\begin{aligned}
S(N) &= \{M(H-N)\}^2\frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)K^{i-1}+M(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)K^{j-1} \\
&\quad +\frac{K^N(K-1)}{2}\sum_{i=1}^{N-2}\sum_{j=1}^{i}(2j-1)(i-j+1)K^{j-1} \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と定式化される．ただし，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$, $\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$ と定義する．ここで，$M(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．

式 (1) に，$M(h)=\dfrac{K^{h+1}-1}{K-1}$ を代入して整理すると，次式が得られる．

$$
\begin{aligned}
S(N) &= \frac{1}{4(K-1)^3}\Big[2(K+1)K^{2H-N+2}+2\{(2N-1)K-2N-1\}K^{2H+2}-8K^{H+N+2} \\
&\quad +4(NK^2+2K-N)K^{H+1}+N\Big\{(N-1)K^3-(N-3)K^2-(N+3)K+(N+1)\Big\}K^N\Big] \qquad (2)
\end{aligned}
$$

以下では，式 (2) の $S(N)$ を最大にする N を求める．

3．最適隣接深さ

$S(N)$ の N に関する差分を $\Delta S(N)$ とおくと

$$\begin{aligned}\Delta S(N) &\equiv S(N+1)-S(N)\\ &= \frac{1}{4(K-1)^2}\left[\left\{4K^2-\frac{2K(K+1)}{K^N}\right\}K^{2H}+\left\{-8K^{N+2}+4K(K+1)\right\}K^H\right.\\ &\quad\left.+(K-1)\left\{(K^2-1)N^2+(K^2+4K-1)N+2K\right\}K^N\right] \qquad (3)\end{aligned}$$

を得る．ただし，$(N=1,2,\cdots,H-1)$，$(H=2,3,\cdots)$ である．ここで，式 (3) の K^H を実数 x とおくと，次の２次関数 $T_N(x)$ が得られる．

$$\begin{aligned}T_N(x) &= \frac{1}{4(K-1)^2}\left[\left\{4K^2-\frac{2K(K+1)}{K^N}\right\}x^2+\left\{-8K^{N+2}+4K(K+1)\right\}x\right.\\ &\quad\left.+(K-1)\left\{(K^2-1)N^2+(K^2+4K-1)N+2K\right\}K^N\right] \qquad (4)\end{aligned}$$

また，$T_N(x)$ を x に関して微分すると

$$T'_N(x)=\frac{1}{(K-1)^2}\left[\left\{2K^2-\frac{K(K+1)}{K^N}\right\}x-2K^{N+2}+K(K+1)\right] \qquad (5)$$

となる．

このとき，$4K^2-\dfrac{2K(K+1)}{K^N}>0$ より，$T_N(x)$ が下に凸であり，さらに

$$\begin{aligned}T_N(K^{N+1}) &= \frac{1}{4(K-1)^2}\left[2(K-2)(2K^{N+1}-K-1)K^{N+2}\right.\\ &\quad\left.+(K-1)\left\{(K^2-1)N^2+(K^2+4K-1)N+2K\right\}K^N\right]>0 \qquad (6)\\ T'_N(K^{N+1}) &= \frac{K(2K^{N+1}-K-1)}{K-1}>0 \qquad (7)\end{aligned}$$

であることから，$x\geq K^{N+1}$ のとき $T_N(x)>0$ となることがわかる．したがって，$H\geq N+1$，すなわち，すべての $H(H=2,3,\cdots)$，$N(N=1,2,\cdots,H-1)$ に対して，$\Delta S(N)>0$ が成り立つ．

以上より，完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ の総頂点間短縮経路長を最大にする隣接深さは，$N^*=H$ となる．

参考文献

[1] 宇野　斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について”, 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86 (1993).

[2] 澤田　清，宇野　斉, “完全２分木の深さ同一頂点間への１辺追加問題 — 総頂点間経路長の最小化 —”, 1999 年度日本 OR 学会春季研究発表会アブストラクト集, pp.152–153 (1999).