多数決ゲームにおける非対称 Banzhaf 投票力指数の 1999 年参議院への応用とその解析

南山大学 ＊鈴木 貴 SUZUKI Takashi
1010463 南山大学 穴太克則 ANO Katsunori

1 はじめに

本研究では，1999 年参議院における各政党の影響力の分析を非対称 Banzhaf 指数で測ることを目的とし，また非対称 Shapley-Owen 指数での結果との比較分析を行う．非対称 Banzhaf 指数は Shenoy(1982) によって定義されていて，本研究では Shenoy の定義を基に選好空間の構成を因子分析により決める．1999 年 2 月における参議院の各政党の議席数は表 1 に示す．

表 1: 1999 年 2 月における参議院の各政党の議席数

	自民	民主	公明	共産	社民	自由
議席数	104	51	23	23	13	12

議論を簡単にするためにこの 6 政党のみを取り上げる．

2 Banzhaf 指数

Banzhaf 指数は，多数決ゲームにおいて，ある投票者が自らの投票態度を賛成から反対ないし反対から賛成に変えることにより，結果を可決から否決ないし否決から可決に変えられるとき，その投票者は影響力を持つと考える指数である．その投票者を swing と呼び，各投票者の swing になる回数の期待値を Banzhaf 指数という．

3 非対称 Banzhaf 指数

非対称な指数とは，各投票者間の関係を考慮にいれた指数で，たとえば自民党と共産党が提携を組む確率は一般的に低いといえるが，対称な指数はこれを考慮にいれず，各投票者がそれぞれ提携する確率をすべて同じとして指数を考えている．従って，Shenoy は，Bazhaf 指数に非対称性を導入するにあたり，議案ごとに各投票者がどれだけの確率で賛成ないしは反対になるか，その確率を定めて指数を定義した．まず選好空間を導入する．ここでは m 次元立方体 $[-1,1]^m$ を考える．m 次元の各軸は，右派か左派か，保守派か革新派か，などの尺度に対応しているが，ここでは数値のとりうる範囲が -1 から 1 の間に限られている．さらに議論を容易にするために，この選好空間を半径 $1/2$ の m 次元の球に写して考える．

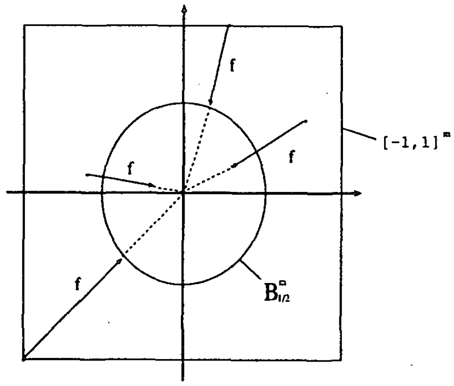

図 1: f による写像

$$B^m_{1/2} = \{x = (x_1, \cdots, x_m) \in R^m : \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_m^2} \leq 1/2\}$$

選好空間 $[-1,1]^m$ 上の点 $z = (z_1, \cdots, z_m) \neq (0, \cdots, 0)$ に対し，実数値を対応させる関数 $d(z)$ を

$$d(z) = \sup\{y > 0 | \max_{j=1,\cdots,m} \frac{y|z_j|}{\sqrt{z_1^2+\cdots+z_m^2}} \leq 1\}$$

によって定義する．$(0, \cdots, 0)$ は原点であり，$|z_j|$ は z_j の絶対値である．この $d(z)$ を用いて，$B^m_{1/2}$ の点 $f(z)$ を

$$[-1,1]^m \xrightarrow{f} B^m_{1/2}$$

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z}{2d(z)} & z \neq (0, \cdots, 0) \\ 0 & z = (0, \cdots, 0) \end{cases}$$

によって定義する．f は，原点からの方向を変えずに，また，方向が同じベクトルについてはその大きさの比を維持しながら，$[-1,1]^m$ の境界面を $B^m_{1/2}$ の球面に，$[-1,1]^m$ の内部を $B^m_{1/2}$ の内部に写す写像である．図 1 に 2 次元の場合の f による写像を表す．議案は，原点を通る方向性をもったベクトル $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_m)$ で表される．ここでベクトルの大きさを 1，すなわち $\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_m^2} = 1$，と基準化する．この議案 ξ に対し，点 $x^i = (x^i_1, \cdots, x^i_m) \in B^m_{1/2}$ に位置する投票者 i が賛成に投票する確率 p^i_ξ を，

$$p^i_\xi = \xi_1 x^i_1 + \cdots + \xi_m x^i_m + 1/2$$

によって定義する．ベクトル ξ と $B^m_{1/2}$ の球面との交点のうち ξ の方向と反対側にある点を ξ^- とするとき，p^i_ξ は ξ^- と x^i から ξ に下ろした垂線の足との距離である．(図 2 参照) 議案 ξ が与えられたときに，投票者の全体の組み合わせ N のうち勝利提携 S に属する投票者が賛成し，他の投票者が反対する組み合わせが起こる確率は

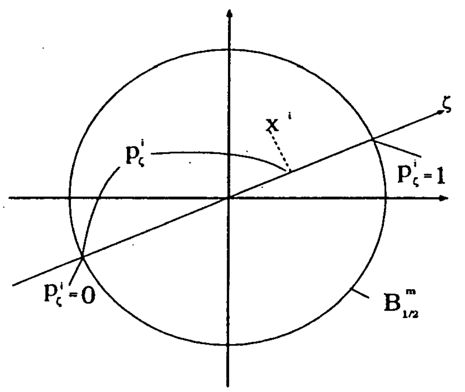

図 2: 議案 ζ に対する投票者 i が賛成する確率

$$\prod_{i\in S} p_\zeta^i \prod_{i\in N-S} (1-p_\zeta^i)$$

で与えられ，またこの組み合わせに対して swing になる投票者を求めることができる．これをもとに 1 人の投票者をとったときに，この議案のもとで，彼が swing になるような賛成，反対の組が起こる確率を計算することができ，彼が swing になる確率を計算することができる．このようにして計算された確率を，この投票者の非対称 Banzhaf 指数という．

4 1999 年参議院への応用

1998 年 7 月から 1999 年 8 月までの間に参議院で提出された議案に対し，各政党が賛成，反対のどちらの態度をとったかというデータ (表 2 参照) を基に，因子分析により議案と政党の位置を 2 次元で求めた．なお全会一致で可決された議案は除き，全 137 件の議案を基に行う．因子分析の結果，第一因子の因子寄与率は 68.284 %，第二因子の因子寄与率は 16.35 %であり，2 因子だけで全体の約 84 %を説明できる．

表 2: 各政党の議案に対する反応

	自民	民主	公明	共産	社民	自由	件数
A	Y	Y	Y	N	Y	Y	63
B	Y	N	Y	N	Y	Y	26
C	Y	N	Y	N	N	Y	17
D	Y	Y	Y	N	N	Y	17
E	Y	N	N	N	Y	Y	5
F	N	Y	N	Y	Y	N	4
G	Y	Y	Y	N	Y	N	1
H	Y	N	N	N	N	Y	1
I	Y	N	Y	Y	N	Y	1
J	N	Y	Y	Y	Y	Y	1
K	N	Y	N	N	N	N	1

分析の結果，各政党の位置はすべて $[-1,1]^2$ に plot されなかったため，もっとも原点から離れて位置している共産党を基準に，各政党間の位置関係が保たれるようにスケーリングをおこない，それを選好空間とした．(図 3 参照)

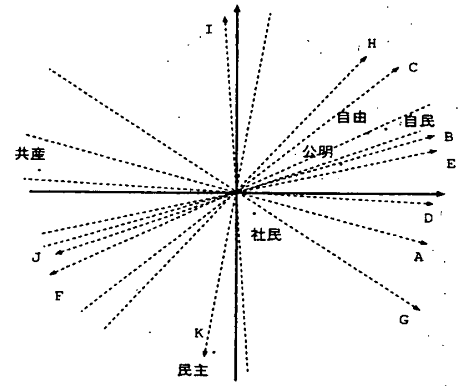

図 3: 議案 (点線) と政党 (点) の位置

各議案に対し，各政党がその議案に対し賛成する確率を求め，swing になる組み合わせの式に代入することで，各政党の非対称 Banzhaf 指数 (NB) を求めた．(表 3 参照) 参考に非対称 Shapley-Owen 指数 (S-O) で求めた結果も表記する．非対称 Shapley-Owen 指数の導出方法は略す．

表 3: 非対称 Banzhaf 指数

政党	自民	民主	公明	共産	社民	自由
NB	0.832	0.168	0.183	0.1	0.063	0.06
S-O	0.526	0	0.35	0	0.124	0

5 非対称 Banzhaf 指数の問題点

- 選好空間の原点の位置 各投票者間の位置関係は変えずに原点の位置を変えると値が変わってしまう．
- 選好空間の決定 質的データを用いているため，因子分析で分析するのは無理がある．数量化 III 類では，議案をベクトルであらわせない．

参考文献

[1] P. Shenoy, *"The Banzhaf Power Index For Political Games"*, Mathematical Social Sciences, Vol.2, pp.299-315,1982.

[2] K. Ano, S. Seko and T. Suzuki, *"Nonsymmetric Indices of Power and their Application to the House of Councilors in Japan"*, to appear.

[3] 参議院会議録 1998 年 7 月～1999 年 8 月