線形的な逃避の確率をもつ競合的在庫問題

01507094 大阪府立大学 総合科学部 *北條仁志 HOHJO Hitoshi
01302694 大阪府立大学 総合科学部 寺岡義伸 TERAOKA Yoshinobu

1. はじめに

近年になって複数の企業における在庫の最適化を考える研究が盛んになされている。我々は競合する企業間においてそれぞれの企業がどのような戦略をとればよいのであろうかということに興味がある。本稿では、ある製品を販売する二つの企業が直線上の市場に一様に分布している顧客に対して製品を提供するモデルについて考察をおこなう。目的は発注や維持、不足を考慮した総コストを最小にする最適発注量を求めることである。我々はこの問題を２人非０和ゲームとして定式化し、解析を試みる。

2. モデルの記述

２人のプレーヤ（Player I, II）がある製品を同時に販売し始め、市場を分け合う在庫問題について考える。Player I は $[0,1]$ 区間上の位置0に、Player II は位置1に店を出している。各プレーヤは期首に一度だけ発注が可能であるとする。期間内における返品や追加注文は行われない。在庫に不足が生じた場合には、バックログが許されない。

客は $[0,1]$ 区間上に一様に分布している。各地点を同時に出発し、一人一個の製品を購入するために距離の近い方の店へ向かう。もしその店に在庫がなければ、到着時刻に関連した確率 $q(T)$ をもって購入をあきらめ、残りの確率 $1-q(T)$ で距離１だけ離れているもう一方の店へ向かう。客の到着時間は移動距離に比例するとする。Player I と II は非協力的であり、目的は発注、保持、品切れ損失、および販売に関する総費用の最小化である。決定変数は期首発注量である。このモデルで用いる記号を以下に述べる：

z_i：期首発注量， $z_i \geq 0,\ i=1,2$
r_i：単位当たりの販売価格， $r_i \geq c_i$
c_i：単位当たりの発注費用， $c_1 \geq 0$
h_i：単位当たりの維持費用， $h_i \geq 0$
p_i：単位当たりのペナルティコスト， $p_i \geq 0$
t：単位距離当たりの移動時間
$Q_i(T)$：時刻 T における在庫量
$I_1(z_1,z_2)$：期平均在庫量
$I_2(z_1,z_2)$：期平均在庫不足量
$C_j^i(z_1,z_2)$：期平均総費用

一般性を失うことなく需要量を1と仮定できる。プレーヤの計画期間を $\frac{3}{2}t$ とする。本稿では客が購入をあきらめる確率 $q(T)$ を

$$q(T)=\frac{2k}{t}T,\quad 0\leq T\leq\frac{1}{2}t,\ \ 0\leq k\leq 1 \tag{1}$$

で与える。このとき次の４つの状況が現われる。

(i) 時刻 $\frac{3}{2}t$ まで両プレーヤともに在庫を持ち続けている場合 ($z_i\geq\frac{1}{2},\ \ i=1,2$)

Player i, $(i=1,2)$ に対して

$$Q_i(T)=\begin{cases} z_i-\frac{T}{t},\ 0\leq T<\frac{1}{2}t \\ z_i-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t\leq T\leq\frac{3}{2}t, \end{cases} \tag{2}$$

で与えられ、これより I_1, I_2, C_1^i は

$$I_1=z_i-\frac{5}{12}, \tag{3}$$

$$I_2=0 \tag{4}$$

$$C_1^i=c_iz_i+h_iI_1+p_iI_2-\frac{1}{2}r_i \tag{5}$$

となる。

(ii) Player I は時刻 $\frac{t}{2}$ までに不足を生じるが、Player II はその不足分も補える場合
($0\leq z_1<\frac{1}{2}, z_1+z_2-1-kz_1^2+\frac{1}{4}k\geq 0$)

Player Iに対して $Q_1(T)$ は(2)式で与えられ、I_1, I_2, C_2^1 はそれぞれ

$$I_1=\frac{1}{3}z_1^2, \tag{6}$$

$$I_2=\frac{1}{3}z_1^2-z_1+\frac{5}{12}, \tag{7}$$

$$C_2^1=c_1z_1+h_1I_1+p_1I_2-r_1z_1 \tag{8}$$

となる。またPlayer IIに対して

$$Q_2(T)=\begin{cases} z_2-\frac{T}{t},\ 0\leq T<\frac{1}{2}t \\ z_2-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t\leq T<(1+z_1)t \\ z_2-\frac{1}{2} \\ \quad -(1+2k)\left(\frac{T}{t}-(1+z_1)\right) \\ \quad +k\left(\frac{T^2}{t^2}-(1+z_1)^2\right), \\ \qquad (1+z_1)t\leq T\leq\frac{3}{2}t, \end{cases} \tag{9}$$

$$I_1 = z_2 + \frac{4}{9}kz_1^3 - \left(\frac{2}{3}+k\right)z_1^2 -\frac{2}{3}kz_1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{36}k, \tag{10}$$

$$I_2 = 0, \tag{11}$$

$$C_2^2 = c_2z_2 + h_2I_1 + p_2I_2 -r_2\left(1+kz_1^2 - z_1 - \frac{1}{4}k\right) \tag{12}$$

となる。

(iii) Player Iは時刻$\frac{t}{2}$までに不足を生じ、Player IIもその不足分により不足を生じてしまう場合
$(0 \le z_1 < \frac{1}{2}, z_2 \ge \frac{1}{2}, z_1+z_2-1-kz_1^2+\frac{1}{4}k < 0)$

Player Iに対しては(ii)と同じである。Player IIに対して$Q_2(T)$は(9)式で与えられ、I_1, I_2, C_3^2は次のようになる。

$$I_1 = \frac{1}{12} + \frac{1+2k}{3}\frac{t_1^2}{t^2} - \frac{4k}{9}\frac{t_1^3}{t^3} -\frac{1+2k}{3}(1+z_1)^2 + \frac{4k}{9}(1+z_1)^3, \tag{13}$$

$$I_2 = \frac{3(1+k)}{4} - (1+2k)\frac{t_1}{t} + \frac{1+5k}{3}\frac{t_1^2}{t^2} -\frac{4k}{9}\frac{t_1^3}{t^3}, \tag{14}$$

$$C_3^2 = c_2z_2 + h_2I_1 + p_2I_2 - r_2z_2. \tag{15}$$

(iv) 両プレーヤとも時刻$\frac{t}{2}$までに不足を生じる場合
$(0 \le z_i < \frac{1}{2},\ i=1,2)$

Player Iに対して

$$Q_1(T) = \begin{cases} z_1 - \frac{T}{t},\ 0 \le T < \frac{1}{2}t \\ z_1 - \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}t \le T < (1+z_2)t \\ z_1 - \frac{1}{2} \\ \quad -(1+2k)\left(\frac{T}{t} - (1+z_2)\right) \\ \quad +k\left(\frac{T^2}{t^2} - (1+z_2)^2\right), \\ \quad (1+z_2)t \le T \le \frac{3}{2}t, \end{cases} \tag{16}$$

$$I_1 = \frac{1}{3}z_1^2, \tag{17}$$

$$I_2 = \frac{1}{3}z_1^2 - z_1 - \frac{4k}{9}(1+z_2)^3 +\frac{1+5k}{3}(1+z_2)^2 - (1+2k)(1+z_2) +\frac{14+9k}{12}, \tag{18}$$

$$C_4^1 = c_1z_1 + h_1I_1 + p_1I_2 - r_1z_1 \tag{19}$$

を得る。Player IIに対しても同様である。

3. 平衡対

前節で述べた利得関数を偏微分することによりその解を純戦略の候補として与え、次の範囲においてそれぞれ双利得行列を形成し、ゲーム論的に解析を行う。解析方法は紙面上の都合により省略する。

(a) $r_i - c_i \ge \frac{h_i-2p_i}{3}$
(b) $0 \le r_i - c_i < \frac{h_i-2p_i}{3}$
(c) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}$,
$\frac{h_2-2p_2}{3} \le r_2 - c_2 < \frac{2(h_2+p_2)}{3}\alpha_1 + \frac{2h_2-p_2}{3}$
(d) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}$,
$\frac{2(h_2+p_2)}{3}\alpha_1 + \frac{2h_2-p_2}{3} \le r_2 - c_2 < h_2$
(e) $0 \le r_1 - c_1 < \frac{h_1-2p_1}{3}, r_2 - c_2 \ge h_2$
(f) $\frac{h_1-2p_1}{3} \le r_1 - c_1 < \frac{2(h_1+p_1)}{3}\alpha_2 + \frac{2h_1-p_1}{3}$,
$0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3}$
(g) $\frac{2(h_1+p_1)}{3}\alpha_2 + \frac{2h_1-p_1}{3} \le r_1 - c_1 < h_1$,
$0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3}$
(h) $r_1 - c_1 \ge h_1, 0 \le r_2 - c_2 < \frac{h_2-2p_2}{3}$
ただし、$\alpha_i = \frac{3(r_i-c_i+p_i)}{2(h_i+p_i)}$, $i=1,2$。

結果として以下のような平衡対が得られる。

(a) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (b) (α_1, α_2) (c) $(\alpha_1, \frac{1}{2})$
(d) $(\alpha_1, -\frac{1+2k}{2} + (1+2k)\alpha_2 - k\alpha_2^2 - \alpha_1 + k\alpha_1^2)$
(e) $(\alpha_1, 1 - \frac{k}{4} - \alpha_1 + k\alpha_1^2)$ (f) $(\frac{1}{2}, \alpha_2)$
(g) $(-\frac{1+2k}{2} + (1+2k)\alpha_1 - k\alpha_1^2 - \alpha_2 + k\alpha_2^2, \alpha_2)$
(h) $(1 - \frac{k}{4} - \alpha_2 + k\alpha_2^2, \alpha_2)$

4. おわりに

本稿では、線的市場上において線形的な逃避の確率をもつ２者競合的在庫問題について考察した。この問題では上記に示した唯一の平衡対が存在する。これより時刻$\frac{3}{2}t$まで在庫を保持する場合には在庫量が$Q\left(\frac{3}{2}t\right) = 0$となるように、不足を生じさせる場合には在庫量が0となる時刻が$\frac{3(r-c+p)}{2(h+p)}t$であるように発注することが最適であることがわかった。

参考文献

[1] 北條仁志, 寺岡義伸：二企業間の経営戦略 -面的市場における一期間競合在庫モデル-, 1999年度日本ＯＲ学会春季研究発表会アブストラクト集, 230-231 (1999).
[2] H.Hohjo : A Competitive Inventory Model with Reallocation under Uniform Demand Distribution, Mathematica Japonica, Vol.49, No.1, 51-64 (1999).
[3] 北條仁志, 寺岡義伸：線的市場における一期間競合在庫モデル, １９９８年度日本ＯＲ学会春季研究発表会アブストラクト集, 94-95 (1998).