2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

探索努力の局所有効性を緩和した最適探索努力配分II:モデルの拡張

02202860 防衛大学校 *坂元 忠彦 SAKAMOTO Tadahiko
01000890 防衛大学校 飯田 耕司 IIDA Koji

1 はじめに

前回の報告[1]では，探索努力の局所有効性を緩和した1次元Koopman問題[2]について最適な探索努力配分を求め，特にデイタム探索における最適努力配分を分析した．本報告では前報の問題について次の拡張を考える．
(1) 2次元Koopman問題， (2) 期待利得最大化問題．

2 2次元Koopman問題

2.1 モデルの前提

1. 目標空間は連続的2次元空間とし，探索努力投入位置を $X=(x_1,x_2)$, 目標位置を $Y=(y_1,y_2)$ で表す．
2. 定常目標物の分布を $p(Y)$ とする．
3. 探索者の連続努力量の制限を Φ とし，地点 X に投入される探索努力密度を $\varphi(X)$ と書く．
4. 地点 X に投入された探索努力 $\varphi(X)$ は地点 Y において $\varphi(X)\,g(|X-Y|)$ の有効性を持つと仮定する．周辺効果関数 $g(z)$ を次式で定義する． $z=|X-Y|$,

$$g(z)=\begin{cases}\delta_z & z=0,\\ g_r(z) & z\neq 0.\end{cases}\qquad \gamma=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}g(z)zdzd\theta.$$

5. 指数型発見法則：$1-\exp(-\alpha(X)\varphi(X))$ を仮定する．
6. 最適性の評価尺度：目標探知確率 $P(\varphi)$. $P(\varphi)$ を最大にする $\varphi=\{\varphi(X),X\in R^2\}$ を最適解 φ^* と書く．

2.2 問題の定式化と最適条件

問題の目的関数 $P(\varphi)$ は次式で表される．

$$P(\varphi)=\iint_{-\infty}^{\infty}p(Y)\{1-\exp(-\alpha(Y)\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi(X)g(|X-Y|)dX)\}dY.$$

ゆえに問題は次式で定式化される．

$$(\mathbb{P}_1)\quad \max_{\varphi}\ P(\varphi),\qquad s.t.\ \iint_{-\infty}^{\infty}\varphi(X)\,dX=\Phi,\ \varphi(X)\geq 0.$$

上式の $P(\varphi)$ 中の φ を次式の ψ で置き換えると問題 $(\mathbb{P}_1)$ は問題 $(\mathbb{P}_2)$ に書き替えられる．

$$\psi(Y)=\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi(X)g(|X-Y|)\,dX. \tag{1}$$

$$(\mathbb{P}_2)\quad \max_{\psi}\ P(\psi)=\iint_{-\infty}^{\infty}p(Y)\{1-\exp(-\alpha(Y)\psi(Y))\}dY,\qquad s.t.\ \iint_{-\infty}^{\infty}\psi(Y)\,dY=\gamma\Phi,\ \psi(Y)\geq 0.$$

$(\mathbb{P}_2)$ は従来のKoopman問題であるので，最適配分の必要十分条件は次式で与えられる．

$$\begin{cases}\psi^*(Y)>0\Leftrightarrow\alpha(Y)p(Y)\exp\big(-\alpha(Y)\psi^*(Y)\big)=\lambda,\\ \psi^*(Y)=0\Leftrightarrow\alpha(Y)p(Y)\leq\lambda\quad(\lambda\text{は正の定数}).\end{cases} \tag{2}$$

ゆえに式(1)に ψ^* を代入して，逆変換すれば $\varphi^*(X)$ が求まる．

2.3 デイタム探索の最適解

ここで目標分布が円形正規分布 $N(0,\sigma^2)$ のデイタム探索について，前報と同様に周辺効果関数が定距離法則とガウス型関数の場合を分析する．

1. 定距離周辺効果関数の場合

努力投入点を中心に半径 a 以内で1, 円外で0の定距離周辺効果関数 $g_r(z)$ の近似関数として次式を仮定する． $(\pi a^2=4d^2)$

$$g_r(z)=\begin{cases}1, & |x_1-y_1|\leq d,|x_2-y_2|\leq d,\\ 0, & |x_1-y_1|>d,|x_2-y_2|>d.\end{cases}$$

式(2)より次式が導かれる．

$$\psi^*(Y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\alpha\sigma_0^2}\{r_0^2-(y_1^2+y_2^2)\},y_1^2+y_2^2\leq r_0^2,\\ 0,\ y_1^2+y_2^2>r_0^2,\ r_0=(4a^2\alpha\sigma_0^2\Phi)^{\frac{1}{4}}.\end{cases} \tag{3}$$

上式を式(1)に代入して $\varphi(X)$ を求めると次式を得る．

$$\varphi(X)=\frac{1}{8\alpha\sigma_0^2d^2}\Big(r_0^2+\frac{2d^2}{3}-(x_1^2+x_2^2)\Big).$$

ただし上式は努力総量制約を満足しないので，上式の r_0 を補正し次式の r_1 に修正する．

$$\Phi=\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1-a}\varphi(r_1)\,r_1dr_1d\theta$$

$$:r_1^4-8d^2r_1^2+8\sqrt{2}d^3r_1+4d^4+4\alpha\sigma_0^2a^2\Phi=0.$$

上式は唯一の正根 r_1 を持ち，準最適解は次式となる．

$$\varphi^*(X)=\begin{cases}\dfrac{r_1^2+\pi a^2/6-(x_1^2+x_2^2)}{2\pi\alpha\sigma_0^2a^2}, & x_1^2+x_2^2\leq(r_1-a)^2,\\ 0, & x_1^2+x_2^2>(r_1-a)^2.\end{cases}$$

2. ガウス型周辺効果関数の場合 (β は正の定数)

$$g_r(z)=\exp\Big(-\frac{z^2}{2\beta^2}\Big).$$

式(2)の $\psi^*(Y)$ は $g_r(z)$ に関係しないから式(3)が成立する．極座標 $X:(r,\theta),Y:(s,\eta)$ に変換し，$\varphi(X)=$

$\varphi(r)$ と置いて上式と式 (3) を式 (1) に代入して積分すれば次式を得る.

$$\int_0^\infty \varphi(r)\exp(-\frac{r^2+s^2}{2\beta^2})I_0(\frac{rs}{\beta^2})rdr$$
$$=\begin{cases}\frac{1}{2\alpha\sigma_0^2}(s_0^2-s^2),\ |s|\le s_0,\\ 0,\ |s|>s_0,\ s_0=(8\alpha\sigma_0^2\beta^2\Phi)^{\frac{1}{4}}.\end{cases} \quad (4)$$

$I_0(w)$ は次数 0 の第 1 種変形ベッセル関数である. 式 (4) を満足する φ は実行可能でないことが証明されるので実行可能な次式の準最適解 $\hat{\varphi}$ を求める.

$$\hat{\varphi}(r)=c_1\exp(-c_2r^2).$$

総量制約及び式 (4) の両辺の 1 次モーメントが一致するように上式の (c_1,c_2) を決定すれば次式を得る.

$$(c_1,c_2)=(\frac{\Phi^3\beta^4}{4C^2-2\Phi^2\beta^6\pi},\frac{\Phi^2\beta^4\pi}{4C^2-2\Phi^2\beta^6\pi}),\ C=\frac{r_0^5}{15\alpha\sigma_0^2}.$$

準最適解の近似度は実用上十分である.

3 期待利得最大化問題

前節の評価尺度を期待利得に変更した場合を考える.

3.1 モデルのパラメータの定義

次のシステム・パラメータを定義する.

t : 連続探索時間 $(0\le t\le T)$,
$\varphi(X,t)$: 時点 t で地点 X に投入される探索努力密度,
$\varphi=\{\varphi(X,t)\}$: 探索計画,
$R(Y)$: 地点 Y で目標物を発見した時の獲得価値,
$c(X)$: 地点 X の単位探索努力当りの探索コスト,
$C\Delta t$: 探索者が $[t,t+\Delta t]$ に使用できる総探索コスト,
$G(\varphi,T)$: 配分 φ で時点 T まで探索する時の期待利得.
その他のパラメータ及び記号は前節と同じとする. 以下, 期待利得 G を最大にする (φ^*,T^*) を求める.

3.2 問題の定式化と最適条件

時点 t の地点 Y での有効探索努力密度は次式となる.

$$\psi(Y,t)=\iint_{-\infty}^{\infty}\varphi(X,t)g(|X-Y|)dX. \quad (5)$$

地点 Y の時点 t までの累積有効探索努力量 :

$$\Psi(Y,t)=\int_0^t\psi(Y,w)dw. \quad (6)$$

探索努力配分 $\varphi(X,t)$ の制約 :

$$\iint_{-\infty}^{\infty}c(X)\varphi(X,t)dX\le C,\ \ \varphi(X,t)\ge 0,\ \ t\in[0,T].$$

目的関数 $G(\varphi,T)$ は式 (5),(6) を用いて次式で表される.

$$G(\psi,T)=\iint_{-\infty}^{\infty}p(Y)\{\int_0^T\alpha(Y)\psi(Y,t)\exp(-\alpha(Y)\Psi(Y,t))\times(R(Y)-Ct)dt-CT\exp(-\alpha(Y)\Psi(Y,T))\}dY.$$

問題は次式で定式化される.

$$(\mathbf{P_3})\quad \max_{(\psi,T)}\ G(\psi,T),$$
$$s.t.\quad \iint_{-\infty}^{\infty}c(Y)\psi(Y,t)\,dY\le\gamma C,$$
$$\psi(Y,t)\ge 0,\ 0\le t\le T.$$

3.3 最適解

問題 $(\mathbf{P_3})$ は局所有効性を持つ努力配分問題であるので, 最適解 (ψ^*,T^*) は Iida [3] によって求められている. そこでは先ず探索停止時点 T が与えられた時の $\{\psi^*((Y,t)|T),T\}$ を求め, 次いで T を変数として, $G(\psi^*,T)$ を最大にする T^* を求め, $\{\psi^*((Y,t)|T^*),T^*\}$ を導く. $\{\psi^*((Y,t)|T^*),T^*\}$ が求められれば, 式 (5) に代入して, 逆変換すれば $\{\varphi^*((X,t)|T^*),T^*\}$ が得られるが, この逆変換の手順はこれまでの Koopman 問題の解法に適用した次の方法が利用できる.

1. 積分方程式 (5) を数値的に解き暫定解を導出する.
2. 暫定解から非負・総量制約を満足し, 適当なパラメータを含む試行関数 (準最適解) を設定する.
3. 試行関数のパラメータを次の方法で決定する.
   (1)モーメント・マッチング法, (2)最小 2 乗法.

数値例については発表の際に示す.

4 まとめ及び今後の課題

本研究では, 周辺効果関数 g を用いて従来の Koopman 問題の探索努力の局所有効性を緩和しモデルを拡張した. この拡張は評価尺度を期待利得に変更した場合でも適用できる. また g を離散空間で定義すれば, 径路型移動目標探索問題や一般的資源配分問題も同様のモデルで拡張できる. 周辺効果関数と逆 N 乗発見法則の関係については今後の研究課題である.

参考文献

[1] 坂元忠彦, 飯田耕司, 探索努力の局所有効性を緩和した最適探索努力配分, 1999 年度秋季 OR 学会研究発表会アブストラクト集, 2-A-5,1999,pp172-173.
[2] B.O.Koopman: The Theory of Search Ⅲ. *Journal of the Operations Research Society of America,* **5** (1957) 613-626.
[3] K.Iida: Optimal Search and Stop in Continuous Search Process. *Journal of the Operations Research Society of Japan,* **27** (1984) 1-30.