「犬はいつどこで兎に追いつくか？」

01003676　九州大学　岩本誠一　IWAMOTO Seiichi

1　はじめに

動的計画 (Dynamic Programming, DP) で用いられている不変埋没 (Invariant Imbedding, I.I.) の考え方は，変数の離散・連続，システムの確定・確率・ファジィ，問題の最適・非最適を問わず，歴史的には数学（微分方程式，偏微分方程式の応用），物理数学などで，また近年はコンピュータサイエンスで幅広く用いられている([1])．この報告では，特に連続状態，連続時間の非最適化問題をI.I.で解く．ここでは，オペレーションズ・リサーチとしても経済学上でも種々に解釈が可能な問題として，「犬が兎を追う」問題 *Dog Chases Rabbit* problem([2][3]) を中心に解析する．

2　「犬が兎を追う」

今，(x,y)-平面上で犬Dが，x-軸上を正の方向に一定の速度で逃げる兎Rを絶えず兎の方向にやはり別の一定の速度で追いかけて捕まえようとしている．兎Rは逃れようとしている．犬の速度 v_D は兎の速度 v_R より大きいとする:$v_D > v_R (>0)$. 兎Rはx-軸上の点 $(r,0)$, $(r \geq 0)$ から，犬Dはy-軸上の点 $(0,d)$, $(d \geq 0)$ からそれぞれ同時に追跡逃亡を開始する．兎は1次元的に逃げるが，犬は2次元的に追いかける．問題は「犬はどこでいつ兎を捕えるか?」である．与えられたデータは4つの数値 v_D, v_R, d, r である．以下，この問題の解を（1）I.I.による偏微分方程式，および（2）微分方程式，によって導く．

2.1　I.I.による偏微分方程式

まず，逃げる兎の位置と追う犬の位置をそれぞれ時間のパラメータで表わす．時刻 t における兎Rの位置 $(x(t),y(t))$ は

$$\mathcal{R}(0;r): \begin{array}{ll} (\mathrm{i})_R & \dot{x}=v_R,\ \ x(0)=r \\ (\mathrm{ii})_R & \dot{y}=0,\ \ y(0)=0 \end{array} \qquad (1)$$

$(\dot{\ } = \dfrac{d}{dt})$, すなわち

$$\begin{array}{ll} (\mathrm{i})_R & x(t)=r+v_Rt \\ (\mathrm{ii})_R & y(t)=0 \end{array} \qquad 0 \leq t < \infty \qquad (2)$$

で表わされる．ここに，$\mathcal{R}(0;r)$ は時刻0でx-軸上の r から兎Rが逃げることを表わしている．他方，犬Dの位置 $(X(t),Y(t))$ は

$$\mathcal{D}(0;d): \begin{array}{ll} (\mathrm{i})_D & \dfrac{\dot{Y}}{\dot{X}}=\dfrac{Y}{X-x} \\ (\mathrm{ii})_D & \dot{X}^2+\dot{Y}^2=v_D^2 \\ (\mathrm{iii})_D & (X(0),Y(0))=(0,d) \end{array} \quad \text{on } [0,\infty) \qquad (3)$$

になる（図1）．$\mathcal{D}(0;d)$ は時刻0でy-軸上の d から犬Dが追いかけることを示している．

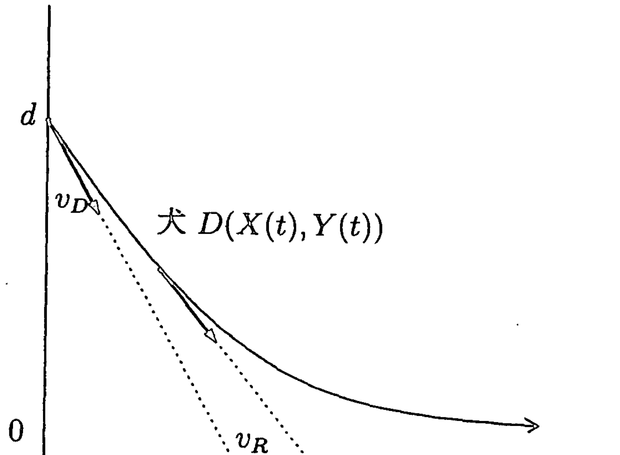

Figure 1: 「犬が兎に追いつく」位置と時間

さて，この (r,dに依存する) 問題において犬Dが兎Rに追いつく (x-軸上の) 位置を $g(r,d)$ とし，そのときの時刻（追いつくまでの時間）を $f(r,d)$ とすると，**追いつき位置関数** $g=g(r,d):[0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ と**追いつき時間関数** $f=f(r,d):[0,\infty)^2 \to [0,\infty)$ はそれぞれ次の1階線形偏微分方程式を満たす：

定理 1

(i) $$\left(v_R - \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}v_D\right)g_r - \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}v_D g_d = -\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}v_D \quad 0 \le r, d < \infty \qquad (4)$$

$$g(r,0) = \frac{v_D}{v_D - v_R} r \quad 0 \le r < \infty, \qquad (5)$$

(ii) $$\left(v_R - \frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}v_D\right)f_r - \frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}v_D f_d = -1 \qquad 0 \le r, d < \infty \qquad (6)$$

$$f(r,0) = \frac{r}{v_D - v_R} \quad 0 \le r < \infty. \qquad (7)$$

事実，追いつき位置関数 $g = g(\cdot,\cdot)$ と追いつき時間関数 $f = f(\cdot,\cdot)$ は，任意の微小 $\delta\ (>0)$ に対してそれぞれ次を満たすことが分かる（図2参照）：

補題 1

$$g(r,d) = X(\delta) + g(x(\delta) - X(\delta),\, Y(\delta)), \qquad (8)$$
$$f(r,d) = \delta + f(x(\delta) - X(\delta),\, Y(\delta)). \qquad (9)$$

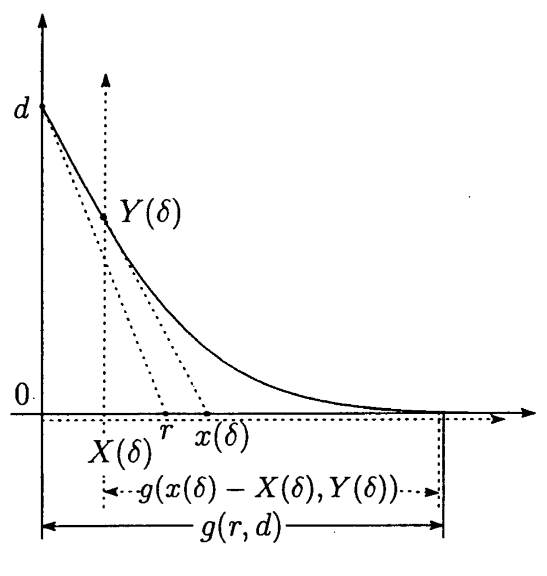

Figure 2: 微小 $\delta(>0)$ 秒後

式 (8), (9) から (4), (6) がそれぞれ導かれる．右辺を2次までテーラー展開して，両辺から左辺の値を引き，$\delta\ (>0)$ で割って，極限 $\lim_{\delta\to 0}$ を取ればよい．境界条件 (5), (7) はすぐ分かる．位置問題「どこで」と時間問題「いつ」は同時併行的に解析されるので，位置問題を詳しく調べればよい．

2.2 時間を含まない微分方程式

兎を追う犬の位置は時間 t のパラメータ表示 $(X(t), Y(t))$ で表わされたが，ここでは時間を含まない微分方程式で表わす．

さて，x-軸上の任意の $X\ (\ge 0)$ における犬Dの位置を $(X, h(X))$ で表わす．このとき，犬Dの**位置関数** $h = h(\cdot)$ は次の2階微分方程式を満たす：

定理 2

(i) $h(0) = d$ (10)

(ii) $h'(0) = -\dfrac{d}{r}$ (11)

(iii) $v_R h'^2 \sqrt{1 + h'^2} = v_D h h''$ on $[0, \infty)$. (12)

曲線 $y = h(x)$ を**犬兎線** *dog-rabbit curve* という．他方，**犬曲線**ともよばれている**追跡線** *tractrix* $y = y(x)$ は $\left|\dfrac{y}{y'}\right|\sqrt{1+y'^2} = a$ である ([4]).

References

[1] Bellman, R.E.: *Some Vistas of Modern Mathematics*, University of Kentuky Press, Lexington, KY, 1968.

[2] Bellman, R.E.: *Eye of the Hurricane: An Autobiography*, World Scientific, Singapore, 1984.

[3] 岩本誠一: 「動的計画論」, 九州大学出版会，1987.

[4] 岩田至康: 「幾何学大辞典２」, p.476, 槙書店，1979.