多段意思決定過程：極値排除和評価系

02302176　九州大学大学院　津留崎 和義　TSURUSAKI Kazuyoshi

1　はじめに

本報告では, 確定的な状況の中で, 与えられた n 個の評価値の中からその最大値および最小値を除外した総和をシステム全体の評価基準としたときの決定過程を考える. この考え方は, 主観や偏見, 先入観などからくる異常な値が評価値の中に最大値や最小値として現れたとき, これらを排除し, 中間値に近いところのデータを用いてシステム全体を評価しようとするものである.

2　決定過程

まず, 記号・用語をまとめておく：

N は段の総数を表す正整数
$X=\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}$ は有限状態空間
$U=\{a_1,a_2,\ldots,a_l\}$ は有限決定空間
$r_n: X\times U\to \mathbb{R}^1$ は第 n 利得関数 $(1\le n\le N)$
$r_{N+1}: X\to \mathbb{R}^1$ は終端利得関数
$f: X\times U\to X$ は確定的運動法則.

本報告では, 利得の総和からそれらの最大値, および最小値を引いたものを評価値とする N 段決定過程を考え, 最終時刻 $N+1$ で任意に与えられた状態 x_{N+1} に到達する最大化問題として, これを $P_{N+1}(x_{N+1})$ で表わす：

$$
\begin{aligned}
&P_{N+1}(x_{N+1}):\\
&\quad \mathrm{Max}\ [r_1+r_2+\cdots+r_N+r_{N+1}\\
&\qquad\qquad -r_1\vee r_2\vee\cdots\vee r_N\vee r_{N+1}\\
&\qquad\qquad -r_1\wedge r_2\wedge\cdots\wedge r_N\wedge r_{N+1}]\\
&\quad\ \text{s.t. (i)}_n\ \ f(x_n,u_n)=x_{n+1}\\
&\qquad\quad \text{(ii)}_n\ \ u_n\in U \qquad 1\le n\le N
\end{aligned} \tag{1}
$$

ただし, $r_n=r_n(x_n,u_n)\quad 1\le n\le N,$
$r_{N+1}=r_{N+1}(x_{N+1}).$

3　前向きの方法

問題 (1) に対しては, 自然な埋め込みよって再帰式を導出することは困難である. したがって, 新しく補助変数を導入した埋め込みを考える必要がある.

3.1　未来値集合

まず, 以下のような未来値関数を定義する：

$$
\begin{aligned}
&\gamma_{N+1}(x_{N+1}):=\tilde{\gamma}\\
&\gamma_n(x_n,u_n,\ldots,x_N,u_N,x_{N+1})\\
&\quad :=r_n\vee\cdots\vee r_N\vee r_{N+1}\vee\tilde{\gamma}\quad 1\le n\le N
\end{aligned} \tag{2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta_{N+1}(x_{N+1}):=\tilde{\delta}\\
&\delta_n(x_n,u_n,\ldots,x_N,u_N,x_{N+1})\\
&\quad :=r_n\wedge\cdots\wedge r_N\wedge r_{N+1}\wedge\tilde{\delta}\quad 1\le n\le N.
\end{aligned} \tag{3}
$$

また, 2つの未来値関数が取り得る値の対の全体：

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{N+1}(x_{N+1}):=\{(\tilde{\gamma},\tilde{\delta})\}\\
&\Gamma_n(x_n)\\
&:=\left\{(\gamma,\delta)\ \middle|\ \begin{array}{l}\gamma=r_n\vee\cdots\vee r_N\vee r_{N+1}\vee\tilde{\gamma}\\ \delta=r_n\wedge\cdots\wedge r_N\wedge r_{N+1}\wedge\tilde{\delta}\\ x_{m+1}=f(x_m,u_m)\\ (x_m,u_m)\in X\times U\\ n\le m\le N\end{array}\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\le n\le N
\end{aligned} \tag{4}
$$

を未来値集合関数という. 未来値集合関数は, 点（現在状態 x_n）対集合値（未来値集合）関数である. 未来値集合関数 $\Gamma_n(\cdot)$ の間には, 次の後ろ向き再帰式が成り立つ.

定理 3.1

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{N+1}(x)=\{(\tilde{\gamma},\tilde{\delta})\}\qquad x\in X\\
&\Gamma_N(x)\\
&=\left\{(\gamma',\delta')\ \middle|\ \begin{array}{l}\gamma'=r_N(x,u)\vee r_{N+1}(y)\vee\tilde{\gamma}\\ \delta'=r_N(x,u)\wedge r_{N+1}(y)\wedge\tilde{\delta}\\ (\tilde{\gamma},\tilde{\delta})\in\Gamma_{N+1}(y)\\ y=f(x,u),\ y\in X,\ u\in U\end{array}\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x\in X
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_n(x)\\
&=\left\{(\gamma',\delta')\ \middle|\ \begin{array}{l}\gamma'=r_n(x,u)\vee\gamma\\ \delta'=r_n(x,u)\wedge\delta\\ (\gamma,\delta)\in\Gamma_{n+1}(y)\\ y=f(x,u),\ y\in X,\ u\in U\end{array}\right\}\\
&\qquad\qquad\qquad x\in X,\ 1\le n\le N-1.
\end{aligned}
$$

3.2 埋め込み

一般に不変埋没原理による方法は, 与えられた問題がそれ自身では解き難いなどの困難な点があるときに用いられる. このような問題に対して, これを含むより広い問題群に埋め込んで, 相隣る問題間の関係式を再帰式などで導き, これを解くことによって本来の問題の最適解を求めようとするものである.

まず, 実数値パラメータ列 $\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$ を以下のように定義する：

$$\begin{aligned} &\gamma_{N+1} := \tilde{\gamma} \\ &\gamma_n := r_n \vee \cdots \vee r_N \vee r_{N+1} \vee \tilde{\gamma} \quad 1 \le n \le N, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\delta_{N+1} := \tilde{\delta} \\ &\delta_n := r_n \wedge \cdots \wedge r_N \wedge r_{N+1} \wedge \tilde{\delta} \quad 1 \le n \le N. \end{aligned} \tag{7}$$

このとき, 列 $\{\gamma_n\}, \{\delta_n\}$ は漸化式：

$$\begin{cases} \gamma_{N+1} = \tilde{\gamma} \\ \gamma_N = r_N \vee r_{N+1} \vee \gamma_{N+1} \\ \gamma_n = r_n \vee \gamma_{n+1} \quad 1 \le n \le N-1, \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} \delta_{N+1} = \tilde{\delta} \\ \delta_N = r_N \wedge r_{N+1} \wedge \delta_{N+1} \\ \delta_n = r_n \wedge \delta_{n+1} \quad 1 \le n \le N-1 \end{cases} \tag{9}$$

をそれぞれ満たしている.

次に, 問題 $P_{N+1}(x_{N+1})$ に対して, 新しく2つの実数パラメータ $(\gamma_{N+1}, \delta_{N+1})$ を含む問題

$$\begin{aligned} &F_{N+1}(x_{N+1}; \gamma_{N+1}, \delta_{N+1}): \\ &\text{Max}\,[r_1 + \cdots + r_N + r_{N+1} \\ &\qquad - r_1 \vee \cdots \vee r_N \vee r_{N+1} \vee \gamma_{N+1} \\ &\qquad - r_1 \wedge \cdots \wedge r_N \wedge r_{N+1} \wedge \delta_{N+1}] \\ &\text{s.t. (i)}_n\ \text{(ii)}_n \\ &x_{N+1} \in X,\ (\gamma_{N+1}, \delta_{N+1}) \in \Gamma_{N+1}(x_{N+1}) \end{aligned} \tag{10}$$

を考える. γ_{N+1}, δ_{N+1} がそれぞれ $\vee$, $\wedge$ 演算の(右) 単位元であるとき, 問題 (10) は本来の問題(1) $P_{N+1}(x_{N+1})$ と等価である. よって, 以下では

$$\gamma_{N+1} = \tilde{\gamma} = -\infty, \quad \delta_{N+1} = \tilde{\delta} = +\infty$$

とする.

問題 (10) の最大値を $W_{N+1}(x_{N+1}; \gamma_{N+1}, \delta_{N+1})$ とすると, $W_{N+1}(x_{N+1}; \tilde{\gamma}, \tilde{\delta})$ が与問題 $P_{N+1}(x_{N+1})$ の最大値である.

次に問題 (10) に対して実数値パラメータ (γ_n, δ_n) を含む次の部分問題群を考える：

$$\begin{aligned} &F_n(x_n; \gamma_n, \delta_n): \\ &\text{Max}\,[r_1 + r_2 + \cdots + r_{n-1} \\ &\qquad - r_1 \vee r_2 \vee \cdots \vee r_{n-1} \vee \gamma_n \\ &\qquad - r_1 \wedge r_2 \wedge \cdots \wedge r_{n-1} \wedge \delta_n] \\ &\text{s.t. (i)}\ f(x_m, u_m) = x_{m+1} \\ &\qquad \text{(ii)}\ u_m \in U \quad 1 \le m \le n-1 \\ &x_n \in X,\ (\gamma_n, \delta_n) \in \Gamma_n(x_n),\ 2 \le n \le N \end{aligned} \tag{11}$$

問題 $F_n(x_n; \gamma_n, \delta_n)$ の最大値を $W_n(x_n; \gamma_n, \delta_n)$ とする. ただし,

$$\begin{aligned} &W_1(x_1; \gamma_1, \delta_1) := 0 - \gamma_1 - \delta_1 \\ &\qquad x_1 \in X,\ (\gamma_1, \delta_1) \in \Gamma_1(x_1) \end{aligned} \tag{12}$$

とする. このとき, 部分問題群の最大値関数に対して, 次の前向きの再帰式が成り立つ.

定理 3.2

$$\begin{aligned} &W_1(x; \gamma, \delta) = 0 - \gamma - \delta \\ &\qquad x \in X, (\gamma, \delta) \in \Gamma_1(x) \\ &W_{n+1}(y; \gamma, \delta) \\ &= \mathop{\text{Max}}_{\substack{u \in U, x; \\ y = f(x,u)}} [r_n(x, u) \\ &\qquad + W_n(x; r_n(x,u) \vee \gamma, r_n(x,u) \wedge \delta)] \\ &y \in X, (\gamma, \delta) \in \Gamma_{n+1}(y), 1 \le n \le N-1 \\ &W_{N+1}(y; \gamma, \delta) \\ &= \mathop{\text{Max}}_{\substack{u \in U, x; \\ y = f(x,u)}} [r_N(x, u) + r_{N+1}(y) \\ &\qquad + W_N(x; r_N(x,u) \vee r_{N+1}(y) \vee \gamma, \\ &\qquad\qquad r_n(x,u) \wedge r_{N+1}(y) \wedge \delta)] \\ &\qquad y \in X, (\gamma, \delta) \in \Gamma_{N+1}(y). \end{aligned} \tag{13}$$

4 最適経路問題

数値例を挙げて検証する.

参考文献

[1] R. E. Bellman and L. A. Zadeh, Decision-making in a fuzzy environment, *Management Science*, Vol.17, B141-B164, 1970.

[2] 岩本 誠一, 『動的計画論』, 九州大学出版会, 1987.