2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファジィ期待値評価を持つ最適ルート問題の再帰的解法

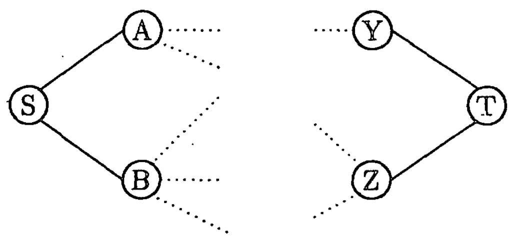
01506906　九州工業大学　藤田敏治　FUJITA Toshiharu

1　はじめに

無向グラフ上の最適ルート問題を考える。各枝上に、何らかのファジィ評価値のペアが与えられているとし、ルートの評価は**ファジィ期待値**（MINMAX期待値）によりおこなう。なお評価の性質上、閉路を含むルートが最適となり得るため、最適ルートが無数に存在することがある。しかし、ここで扱っている問題は、閉路が存在する場合、閉路を取り除くとルート上の評価値は改善されるか、あるいは変わらないことが示される。よって、最適ルートの候補として単純路のみを考え、単純路全体のクラス内での最適化を考える。

2　記号と定義

次のような、S を始点、T を終点とする無向グラフ上の最適ルート問題を考える。



V で節点全体の集合、E で枝全体の集合を表し、順序付けられた節点の集合

$$P=\{p_0,\ p_1,\ \ldots,p_l\},\quad p_i\in V,\ (p_i,p_{i+1})\in E$$

をパス、パスの最初に位置する節点を始端、最後に位置する節点を終端と呼ぶ。また、$V^+(P)$ でパス P の終端に接続する節点で、P に含まれない節点の全体を表わす。ただし、終端がルート問題の終点の場合、$V^+(P)$ は空集合とする。パス間の加法 P_1+P_2 は P_1 の終端の後に P_2 の節点列を接続した集合を表わすものと定義する：

$$\begin{aligned}&\{p_0,\ p_1,\ \ldots,p_l\}+\{q_0,\ q_1,\ \ldots,q_k\}\\&\quad=\{p_0,\ p_1,\ \ldots,p_l,\ q_0,\ q_1,\ \ldots,q_k\}\end{aligned}$$

（これは、$(p_l,q_0)\in E$ のときのみ定義される）

3　問題の定式化

3.1　ファジィ期待値評価

節点 A と節点 B を結ぶ枝 (A,B) 上に何らかのファジィ評価のペア $(r_i,\ \nu_i)$, $0\le r_i,\nu_i\le 1$, $i=1,2,\ldots,m$ が与えられているとする。これに対し、(A,B) 上の評価を

$$\bigwedge_{i=1}^{m}(r_i\vee\nu_i)=(r_1\vee\nu_1)\wedge(r_2\vee\nu_2)\wedge\cdots\wedge(r_m\vee\nu_m)$$

で定義する。これがファジィ期待値と呼ばれるているものである。

より一般の場合、たとえば、枝 (A,B) 上に (r_{1i},ν_{1i})、(B,C) 上に (r_{2i},ν_{2i}) という評価のペアが与えられている場合は、$A\to B\to C$ のルート評価は次のように考える：

$$\bigwedge_{i_1,i_2}\{\,(\,r_{1i_1}\ \wedge\ r_{2i_2}\,)\vee(\,\nu_{1i_1}\ \wedge\ \nu_{2i_2}\,)\}$$

3.2　最適ルート問題

グラフ $G:=(V,E)$ の各枝 $(p,q)\in E$ 上にファジィ評価のペア $(r_i(p,q),\nu_i(p,q))$ が与えられているとする（$0\le r(p_n,p_{n+1})$, $\nu(p_n,p_{n+1})\le 1$, $(p_n,p_{n+1})\in E$）。このとき、グラフ G 上のファジィ期待値最大化問題は次のように定式化される：

$$\begin{aligned}\text{Max}\bigwedge_{i_1,\ldots,i_l}&\Big[\Big(r_{i_1}(p_0,p_1)\wedge\cdots\wedge r_{i_l}(p_{l-1},p_l)\Big)\\&\vee\Big(\nu_{i_1}(p_0,p_1)\wedge\cdots\wedge\nu_{i_l}(p_{l-1},p_l)\Big)\Big]\quad(1)\end{aligned}$$

s.t. $S=p_0,p_1,\ldots,p_l=T$: S から T へのパス

4　再帰式による解法

S からスタートし、単純路をたどりながら、再帰的にファジィ期待値を求める方法について考える。最初に、単純路の生成について考える。これは、次の再帰的関係により実現できる。

単純路の生成

$$W_0\ =\ \{\{S\}\}$$

$$W_{n+1} = \bigcup_{P\in W_n} \bigcup_{p\in V^+(P)} \{P+\{p\}\},\ n=0,1,\ldots$$

(空集合に関する和集合の結果は空集合とする)

終了条件は $W_{n+1}=\phi$ で、そのとき n を N とおく。 □

問題 (1) は、その評価の性質上、各枝の評価値を単純に累積していくことでは、パス全体のファジィ期待値を求めることは出来ない。そこで、**集合値パラメーター $\Lambda_0 \subset [0,1]\times[0,1]$ を導入した問題**:

$$\begin{aligned} &u(S,T;\Lambda_0)\\ &= \mathrm{Max} \bigwedge_{i_1,\ldots,i_l} \bigwedge_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_0} \{(\lambda\wedge r_{i_1}\wedge\cdots\wedge r_{i_l})\\ &\qquad\qquad \vee(\mu\wedge\nu_{i_1}\wedge\cdots\wedge\nu_{i_l})\}\\ &\quad \text{s.t. } P=\{S=p_0,p_1,\ldots,p_{l-1},p_l=T\}\in W_i\\ &\qquad\quad \exists i\in\{1,2,\ldots,N\} \end{aligned}$$

を考える。なお、容易に分かるように、上記の問題において $\Lambda_0=\{(1,1)\}$ とおいたとき、与問題と等価になる。

次に、**過去値集合** $\Lambda_i(P)$ と **過去値集合族** $H(p)$ を次のように定義する。まず、$P\in W_0$ に対し

$$\Lambda_0(P)=\Lambda_0, \quad H(S)=\{\Lambda_0(P)\}$$

$$H(p)=\phi \quad (p\in V\backslash\{S\})$$

とおき、以後再帰的に、$P\in W_n,\ \ p\in V^+(P)$ に対し

$$\begin{aligned} &\Lambda_{n+1}(P+\{p\})\\ &=\bigcup_i \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_n(P)} \{(\lambda\wedge r_i(q,p),\mu\wedge\nu_i(q,p))\}\\ &\qquad (\text{ただし } q \text{ は } P \text{ の終端})\\ &H(p)=H(p)\cup\{\Lambda_n(P+\{p\})\}\\ &\qquad\qquad\qquad n=0,1,\ldots,N-1 \end{aligned}$$

と定める。このとき、埋め込み問題 $u(S,T;\Lambda_0)$ は次の問題と等価になる:

$$\underset{\Lambda\in H(T)}{\mathrm{Maximize}} \bigwedge_{(\lambda,\mu)\in\Lambda} (\lambda\vee\mu)$$

そして、この問題の最大値、および最大値を与える $\Lambda=\Lambda(P)$ の P があらわすパスが $u(S,T;\Lambda_0)$ の解 (最適ルート) である。

以上の考察より、最適ルートを求めるアルゴリズムは次で与えられる。

Step 1

$$W_0=\{\{S\}\},\ \ \Lambda_0(\{S\})=\{(1,1)\},\ \ H(T)=\phi$$

とおき、$n=0$ とする。

Step 2

$$W_{n+1}=\bigcup_{P\in W_n}\bigcup_{p\in V^+(P)}\{P+\{p\}\}$$

を求め、$W_{n+1}\neq\phi$ ならば **Step 3** へ。そうでなければ、**Step 4** へ。

Step 3 各 $P\in W_n$ と $p\in V^+(P)$ のペアに対し (ただし、$V^+(P)=\phi$ のときは考えない)、

$$\begin{aligned} &\Lambda_{n+1}(P+\{p\})\\ &=\bigcup_i \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_n(P)} \{(\lambda\wedge r_i(q,p),\mu\wedge\nu_i(q,p))\}\\ &\qquad (\text{ただし } q \text{ は } P \text{ の終端})\\ &H(p)=H(p)\cup\{\Lambda_n(P+\{p\})\}\\ &\qquad\qquad\qquad n=0,1,\ldots,N-1 \end{aligned}$$

を求め、$p=T$ に対しては $H(T)$ を更新し:

$$H(T)\leftarrow H(T)\cup\{\Lambda_{n+1}(P+\{p\})\}$$

$n\leftarrow n+1$ として、**Step 2** へ

Step 4 得られた $H(T)$ に対し次の問題を解く:

$$\underset{\Lambda\in H(T)}{\mathrm{Maximize}} \bigwedge_{(\lambda,\mu)\in\Lambda} (\lambda\vee\mu)$$

この問題の最大値、および最大値を与える $\Lambda=\Lambda(P)$ の P が最適ルート問題の解である。 □

References

[1] Bellman, R.E. and Zadeh, L.A.: Decision-making in a fuzzy environment, Management Science, **17**, 1970, pp. B141-B164.

[2] Iwamoto, S.: Associative dynamic programs, J. Math. Anal. Appl., **201**, 1996, pp. 195-211.

[3] Iwamoto, S. and Sniedovich, M.: Sequential decision making in fuzzy environment, J. Math. Anal. Appl., **222**, 1998, 208-224.

[4] Fujita T. and Iwamoto, S.: An Optimistic Decision-making in Fuzzy Environment, Proceedings of 7th Bellman Continuum, to appear.