2000 年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

MTP_2 の一般化と部分観測可能なマルコフ過程について

01402656　九州大学経済学部　中井　達　NAKAI Tōru

1　一般化した MTP_2 とその性質

一般化した MTP_2 (multivariate total positivity of order two) について議論し、部分観測可能なマルコフ過程における多段決定モデルに適応する。この性質は、MTP_2 として知られている性質の一般化である。Nakai[3] において、MTP_2 を用いた仮定の下で、部分観測可能なマルコフ連鎖の性質を議論している。一方、FKG 不等式は MTP_2 のときに成り立つ性質であり、Fortuin et al. [1], Kemperman [2] および Preston [4] では、確率測度が絶対連続の場合に議論している。

$\mathcal{S}$ を完備で可分な全順序が定義された距離空間とし、この可測空間で定義されている全順序を $\leq$ で表す。$\mathcal{B}$ を $\mathcal{S}$ の Borel 集合とする。つぎに、全順序が定義された完備距離空間の直積空間で、自然な形で半順序が定義されている場合に拡張する。いま、$\mathcal{S}^n=\prod_{i=1}^n \mathcal{S}, \mathcal{B}^n=\prod_{i=1}^n \mathcal{B}$ とする。ただし、$\mathcal{S}^1=\mathcal{S}, \mathcal{B}^1=\mathcal{B}$ である。また、μ_n を直積可測空間 $(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での確率測度とする。ここで $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n)$ を $(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での確率測度の集合とし、$(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での確率測度の間に一般化した MTP_2 を用いて順序を定義する。ここでは、確率測度が絶対連続であるとは仮定しない。

定義 1 $\mathcal{S}^n$ の２つの集合 $A^n=\prod_{i=1}^n A_i$ と $B^n=\prod_{i=1}^n B_i$ で $A_i, B_i \subset \mathcal{S}$ かつ $A_i \cap B_i = \emptyset$ とする $(i=1,\cdots,n)$ 。いま、$A_i \prec B_i$ ならば $A_i \vee B_i = B_i$ および $A_i \wedge B_i = A_i$ とする。記号 $\vee$ と $\wedge$ を $A^n \vee B^n = \prod_{i=1}^n A_i \vee B_i, A^n \wedge B^n = \prod_{i=1}^n A_i \wedge B_i$ で定義する。ただし、$\mathcal{S}$ に含まれる任意の２つの *Borel* 集合 A と B に対して、$A \prec B$ とは $a \leq b$ が任意の $a \in A$ と $b \in B$ に対して成り立つときをいう。

定義 2 $(\mathcal{S}^n,\mathcal{B}^n)$ での２つの確率測度を μ_n および ν_n とする。たがいに背反な *Borel* 集合 $A^n=\prod_{i=1}^n A_i$ と $B^n=\prod_{i=1}^n B_i$ $(A^n,B^n \in \mathcal{B}^n, A_i,B_i \subset \mathcal{S}, A_i \cap B_i=\emptyset, i=1,\cdots,n)$ に対して、$\mu_n(A^n \vee B^n)\nu_n(A^n \wedge B^n)-\mu_n(A^n)\nu_n(B^n) \geq 0$ であり、少なくとも１つの組み合わせ A^n と B^n について $\mu_n(A^n \vee B^n)\nu_n(A^n \wedge B^n) > \mu_n(A^n)\nu_n(B^n)$ のとき $\mu_n \succ \nu_n$ であるとする。また、任意の $A^n \in \mathcal{B}^n$ に対して、確率１で *If* $\mu_n(A^n)=\nu_n(A^n)$ のとき $\mu_n=\nu_n$ とする。$\mu_n=\nu_n$ または $\mu_n \succ \nu_n$ ならば $\mu_n \succeq \nu_n$ である。

補題 1 μ_n と ν_n を $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n)$ 上の２つの確率測度で、$\mu_n \succeq \nu_n$ とする。つぎに、μ_{n-1}, ν_{n-1} を μ_n と ν_n の周辺測度とすれば、$\mu_{n-1}(A^{n-1})=\mu_n(A^{n-1}\times\mathcal{S})$ および $\nu_{n-1}(B^{n-1})=\nu_n(A^{n-1}\times\mathcal{S})$ $(A^{n-1}\times\mathcal{S}, B^{n-1}\times\mathcal{S} \in \mathcal{S}^{n-1}\times\mathcal{S}=\mathcal{S}^n)$ である。このとき $\mu_{n-1}(A^{n-1}\vee B^{n-1})\nu_{n-1}(A^{n-1}\wedge B^{n-1})-\mu_{n-1}(A^{n-1})\nu_{n-1}(B^{n-1}) \geq 0$ である。

補題 2 μ_n と ν_n を $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n)$ 上の２つの確率測度で、$\mu_n \succeq \nu_n$ とする。このとき、$(\mathcal{S}^n\times\mathcal{S}^n, \mathcal{B}^n\times\mathcal{B}^n)$ 上の確率測度 δ で $\delta(A^n\times\mathcal{S}^n)=\mu_n(A^n)(A^n\in\mathcal{B}^n), \delta(\mathcal{S}^n\times B^n)=\nu_n(B^n)(B^n\in\mathcal{B}^n)$ および $\delta(\{(s^n,t^n)|(s^n,t^n)\in\mathcal{S}^n\times\mathcal{S}^n, s^n\succeq t^n\})=1$ となるものが存在する。

命題 1 $\mathbb{P}(\mathcal{S}^n)$ に含まれる２つの確率測度 μ_n と ν_n で、$\mu_n \succeq \nu_n$ とする。もし、$h:\mathcal{S}^n\to\mathcal{R}_+$ が $\mathcal{B}^n$ 上の有界な非減少関数であれば $\int_{\mathcal{S}^n} h(s)d\mu_n(s) \geq \int_{\mathcal{S}^n} h(s)d\nu_n(s)$ である。ただし、k-次関数 $\varphi:\mathcal{R}_+^k\to\mathcal{R}_+$ が x に関する非減少関数 (非増加関数) であるとは、$x \prec y$ のとき $\varphi(x)\leq\varphi(y)$ $(\varphi(x)\geq\varphi(y))$ であることをいう。

2　部分観測可能なマルコフ過程

部分観測可能なマルコフ過程で、その状態を直接には知ることは出来ないとする。ここで、$(\mathcal{S},\mathcal{B})$ を前節で定義した可測空間とし、この確率過程の状態を表す。さらに、$P(\cdot|s)\,(s\in\mathcal{S})$ を推移法則を表し、状態

空間 $\mathcal{S}$ から $\mathcal{S}$ への推移を表す。次に、可測集合 $B \in \mathcal{B}$ に対して $P(B|s) = \int_B p(dt|s)$, とする。ここで、任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、$p(\cdot|s)$ は $\mathcal{S}$ 上の確率測度である。この確率過程の状態 s に対して、平均が有限で非負の k-次の多変量確率変数 $\boldsymbol{X}_s$ を仮定し、観測過程を表す。この確率変数の確率分布を、任意の $s \in \mathcal{S}$ と Borel 集合 $C \subset \mathcal{R}_+^k = (0,\infty)^k$ に対して $\Pr(\boldsymbol{X}_s \in C) = \int_C f(dx|s)$ とする。これらの確率変数から得られる標本を用いて、この確率過程の状態に関する情報を得る。確率過程の状態に関する情報は、すべて $\mathcal{S}$ 上の確率測度で表され、情報全体の集合は $\boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ であり、定義 2 を用いて順序を定義する。

任意の標本値 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ $(\in \mathcal{R}_+^k)$ と事前情報 $\boldsymbol{\mu}$ に対して、事後情報が存在し、ベイズの定理にしたがって $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ と学習する。いま、$\mathcal{R}_+^k = \prod_{i=1}^k \mathcal{R}_+, \mathcal{X}^k = \prod_{i=1}^k \mathcal{X}$ とし $\mathcal{R}_+^1 = \mathcal{R}_+, \mathcal{X}^1 = \mathcal{X}$ とおく。ここで、$\mathcal{X}$ は $\mathcal{R}_+$ の Borel 集合とする。任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、$\boldsymbol{F}_k(\cdot|s)$ を $(\mathcal{R}_+^k, \mathcal{X}^k)$ 上の確率測度とする。

仮定 1 たがいに素な２つの *Borel* 集合を $\boldsymbol{X}^k = \prod_{i=1}^k X_i$ および $\boldsymbol{Y}^k = \prod_{i=1}^k Y_i$ $(\boldsymbol{X}^k, \boldsymbol{Y}^k \in \mathcal{X}^n, X_i, Y_i \subset \mathcal{R}_+, X_i \cap Y_i = \emptyset, i = 1, \cdots, k)$ とする。任意の状態 $s, t \in \mathcal{S}$ に対して $\boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k \vee \boldsymbol{Y}^k | s \vee t) \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k \wedge \boldsymbol{Y}^k | s \wedge t) \geq \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{X}^k|s) \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{Y}^k|t)$. である。

仮定 2 任意の状態 $s \in \mathcal{S}$ に対して、推移法則を $\boldsymbol{P}(\cdot|s)(s \in \mathcal{S})$ とする。状態 s および t が $s \prec t$ のとき、$\boldsymbol{P}(A|s)\boldsymbol{P}(B|t) \leq \boldsymbol{P}(B|s)\boldsymbol{P}(A|s)$ である。

定義 3 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ と $\boldsymbol{y} = (y_1, \cdots, y_k)$ を $\mathcal{R}_+^k$ からの２つの標本とする。$x_i \leq y_i$ $(i = 1, 2, \cdots, k)$ のとき、$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{y}$ より小さいといい、$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ と表す。

定理 1 任意の $\boldsymbol{\mu} \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S})$ に対して、$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$ ならば $\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})} \succeq \overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{y})}$ である。任意の $\boldsymbol{x} \in \mathcal{R}_+^k$ に対して、$\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}$ ならば $\overline{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})} \succeq \overline{\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})}$ である。

命題 1 より、$n = 1, \mathcal{S} = \mathcal{R}_+$ とおくことによって次の性質が得られる。

系 1 $\boldsymbol{\mu}_k$ と $\boldsymbol{\nu}_k$ を $(\mathcal{R}_+^k, \mathcal{X}^k)$ 上の２つの確率測度とする。$\boldsymbol{C}^k = \prod_{i=1}^k C_i$ と $\boldsymbol{D}^k = \prod_{i=1}^k D_i$ を背反な２つの *Borel* 集合とし $(\boldsymbol{C}^k, \boldsymbol{D}^k \in \mathcal{X}^k, C_i, D_i \subset \mathcal{R}_+, C_i \cap D_i = \emptyset, i = 1, \cdots, k)$、$\boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{C}^k \vee \boldsymbol{D}^k)\boldsymbol{\nu}_k(\boldsymbol{C}^k \wedge \boldsymbol{D}^k) - \boldsymbol{\mu}_k(\boldsymbol{C}^k)\boldsymbol{\nu}_k(\boldsymbol{D}^k) \geq 0$ とする。もし、$h : \mathcal{R}_+^k \to \mathcal{R}_+$ が $\mathcal{X}^k$ の有界な非減少可測関数ならば $\int_{\mathcal{R}_+^k} h(x) d\boldsymbol{\mu}_k(x) \geq \int_{\mathcal{R}_+^k} h(x) d\boldsymbol{\nu}_k(x)$ である。

補題 3 $\boldsymbol{\mu} \succeq \boldsymbol{\nu}\, (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{P}(\mathcal{S}))$ ならば $\mathrm{E}_{\boldsymbol{\mu}}[\varphi(\boldsymbol{X})] \geq \mathrm{E}_{\boldsymbol{\nu}}[\varphi(\boldsymbol{X})]$ が $\boldsymbol{x}$ の任意の非減少関数 $\varphi(\cdot)$ について成り立つ。

参考文献

[1] Fortuin, C. M., Kasteleyn,P. W. and Ginibre, J. (1971) Correlation Inequalities on Some Partailly Ordered Sets, *Communications on Mathematical Physics*, **22**, 89–103.

[2] Kemperman, J. H. B. (1977), On the FKG-Inequality for Measures on a Partially Ordered Space, *Indagationes Mathematicae*, **39**, 313–331.

[3] Nakai, T. (1998), Sequential Decision Problems with Learning Procedure for Multivariate Random Variables, *Proceedings of the First Euro-Japanese Workshop on Stochastic Risk Modelling for Finance, Insurance, Production and Reliability*, **2**, Brussels.

[4] Preston, C. J. (1974), A Generalization of the FKG Inequaliteis, *Communications on Mathematical Physics*, **36**, 233–241.