2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

Gusein-Zade問題の一般化

02102643　愛知大学　*川合　益代　KAWAI Masuyo
01303783　　　　　　玉置　光司　TAMAKI Mitsushi

1. はじめに

最初にGusein-Zade[1]問題を復習しておこう。ある雇用者が1人の秘書を採用するために面接を行い、応募してきたn人に毎時1人ずつ面接を行う。雇用者が全応募者の中で最良(絶対順位1)の応募者または2番目に良い(絶対順位2)応募者を採用したいと考えているとき、この確率を最大にする政策とその下での成功確率を求めることが目的である。ただし、雇用者は、応募者に順位付けすることができ、面接を行ったら直ちにその応募者を採用するかまたは採用しないで次の応募者を面接するかを決定しなければならない。採用するか否かの決定は、応募者の相対順位(今までに面接した応募者の中での順位)にのみ依存して行い、一度不採用にした応募者は、後で採用することができない。相対順位1または2の応募者を候補者と呼び、両者を区別する必要がある場合には、相対順位1(2)の候補者を候補者1(2)と呼ぶことにする。

この論文では、第2章においてGusein-Zade[1]の一般化として応募者数が未知の場合を考察する。絶対順位1の応募者だけを採用することが目的である古典的秘書問題に対する応募者数が未知の場合の問題は、既にPresman and Sonin[3]やPetruccelli[2]、また、これに類似した問題はSamuel-Cahn[4]により研究されている。この論文では、応募者数Nを分布が既知の確率変数とみなして問題を定式化する。特に、Nが$[1,m]$上の一様確率変数の場合については、最適政策とその下での成功確率を導出し、$m\rightarrow\infty$のときの漸近的挙動についても調べる。最後の章において応募者数が未知の場合の結果とGusein-Zade[1]の結果を比較する。

2. 定式化と最適戦略

ここでは、応募者数を確率変数Nで表す。また、Nの分布を$p_n=P\{N=n\}$として、$\pi_r=\sum_{n=r}^{\infty}p_n$とおく。ただし、$P\{N\geq 1\}=1$とする。

はじめに、以下の記号を定義する。

f_r：r番目の応募者が候補者1のとき、以後最適にふるまって成功する確率

g_r：r番目の応募者が候補者2のとき、以後最適にふるまって成功する確率

f_r^A：r番目の応募者が候補者1のとき、その人を採用して成功する確率

f_r^R：r番目の応募者が候補者1のとき、その人を見送り以後最適にふるまって成功する確率

g_r^A：r番目の応募者が候補者2のとき、その人を採用して成功する確率

g_r^R：r番目の応募者が候補者2のとき、その人を見送り以後最適にふるまって成功する確率

$p_{r,n}(s,t)$：応募者数nが既知で今までにr人の面接を行い、r番目の応募者が候補者s $(s=1,2)$のとき、その絶対順位がt $(t=1,2)$である確率

$q_{r,j}(s)$：r番目以降の最初の候補者がj $(j\geq r+1)$番目に出現して、それが候補者s $(s=1,2)$である確率

このとき、最適性の原理より、DP方程式は以下のようになる。

$$f_r=\max(f_r^A,f_r^R),\quad (1\leq r)$$
$$g_r=\max(g_r^A,g_r^R),\quad (1<r)$$

ただし、

$$f_r^A=\sum_{n=r}^{\infty}[p_{r,n}(1,1)+p_{r,n}(1,2)]\left(\frac{p_n}{\pi_r}\right),\quad (1\leq r)$$
$$g_r^A=\sum_{n=r}^{\infty}p_{r,n}(2,2)\left(\frac{p_n}{\pi_r}\right),\quad (1<r)$$
$$f_r^R=g_r^R=\sum_{n=r+1}^{\infty}\left[\sum_{j=r+1}^{n}(q_{r,j}(1)f_j+q_{r,j}(2)g_j)\right]\left(\frac{p_n}{\pi_r}\right).\quad (1<r)$$

この論文では、Nが$[1,m]$上の一様分布、$p_n=\frac{1}{m}$ $(1\leq n\leq m)$に従う場合の最適政策の数学的性質

を論じる。この場合、$\pi_r=\sum_{n=r}^{m}p_n=\frac{m-r+1}{m}$, $\frac{p_n}{\pi_r}=\frac{1}{m-r+1}$より上述のDP方程式は以下のようになる。

$$f_r^A=\frac{2r}{m-r+1}\sum_{n=r}^{m}\frac{1}{n}-\frac{r}{m}, \quad (1\le r\le m)$$

$$g_r^A=\frac{r}{m}, \quad (1<r\le m)$$

$$f_r^R=g_r^R=\frac{r(r-1)}{m-r+1}\sum_{j=r+1}^{m}\frac{(m-j+1)(f_j+g_j)}{j(j-1)(j-2)}, \quad (1<r<m)$$

$$f_1^R=\frac{m-1}{2m}(f_2+g_2),$$

$f_m=g_m=1.$

このとき、以下の結果が得られる。

定理1 s_1,s_2を以下のように定義する。

$$s_1=\min\left\{r<s_2:3\sum_{n=r}^{s_2-2}\frac{1}{n}+1-\frac{3s_2-2r-4}{m}\ge 2\sum_{k=r+1}^{s_2-1}\frac{1}{k-1}\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n}\right\},$$

$$s_2=\min\left\{r\le m:\frac{3(m-r+1)}{2m}\ge\sum_{n=r}^{m}\frac{1}{n}\right\}.$$

このとき、最適政策は以下のように述べることができる。

最初の(s_1-1)人の応募者を採用せず、s_1以降に出現する最初の候補者1を採用する。ただし、時刻(s_2-1)までに候補者1が出現しない場合は、s_2以降は最初に出現した候補者を採用する。

また、成功確率f_1は、以下のように与えられる。

$$f_1=\frac{s_1-1}{m}\left[2\sum_{k=s_1}^{s_2-1}\frac{1}{k-1}\sum_{n=k}^{m}\frac{1}{n}-\sum_{n=s_1-1}^{s_2-1}\frac{1}{n}+2\sum_{n=s_2}^{m}\frac{1}{n}-\frac{2s_2-5}{s_2-1}+\frac{3s_2-s_1-4}{m}\right], \quad (s_1\ne 1)$$

ただし、$m=1,2$のときは明らかに1であり、$s_1=1$のときは、$\frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}-\frac{1}{m}$である。

2.1 最適政策下での漸近的挙動

$m\to\infty$としたときの漸近的挙動に関しては、以下の結果が成立する。

補題1 $m\to\infty$のとき、$\frac{s_i}{m}$は、有限値s_i^* $(i=1,2)$に収束する。

s_2^*は、次式の根xとして与えられる。

$$2\log x+3(1-x)=0.$$

これより、 $s_2^*\approx 0.4172.$

s_1^*は、次式の根xとして与えられる。

$$\log\frac{s_2^*}{x}(\log xs_2^*+3)+1+2x-3s_2^*=0.$$

これより、 $s_1^*\approx 0.1204.$

成功確率f_1^*については、以下のように与えられる。

$$s_1^*\left[\log\left(\frac{s_1^*}{s_2^*}\right)(\log s_1^*s_2^*+1)-2\log s_2^*+3s_2^*-s_1^*-2\right].$$

これより、成功確率は、約0.4038となる。

3. おわりに

応募者数が確実に1000人の場合と平均1000人の場合を比較する。

	s_1	s_2	成功確率
Gusein-Zade[1] (応募者数が1000人)	348	667	0.5741
一様確率変数の場合 ($m=2000$)	242	836	0.4049

表より、応募者数が一様確率変数の場合は、Gusein-Zade[1]より候補者1については早い時刻から採用を開始するが、候補者2については遅い時刻から採用を開始することがわかる。

参考文献

[1] Gusein-Zade,S. M. The problem of choice and the optimal stopping rule for a sequence of indipendent trials, *Theo. Prob. Appl.*11,472-476.(1966)

[2] Petruccelli,J. D. On the best-choice problem when the number of observation is random, *J.Appl. Prob.*20,165-171.(1983)

[3] Presman,E. L. and Sonin,I. M. The best choice problem for a random number of objects, *Theor. Probab.Appl.*17,657-668.(1972)

[4] Samuel-Cahn. E. The best-choice secretary problem with random freeze on jobs, *Stoch.Proc.Appl.*55,315-327.(1995)