2000年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

離散最適化問題の新上限値計算

＊関西大学　森部　浩至　MORIBE　Hiroshi
01402374　関西大学　仲川　勇二　NAKAGAWA　Yuji
関西大学　大下　吾朗　OSHITA　Gorou

1．はじめに

決定すべき空間が離散的であるような最適化問題は，離散最適化問題（非線型ナップザック問題）と呼ばれる．

本論においては，離散最適化問題を解くために，モジュラー法（MA）[1]に基づくより効率の良いアルゴリズムを構築するために，より強い限界値を計算する方法を提案，評価し，考察する．

2．離散最適化問題（非線型ナップザック問題）

次の最適化問題を考える．

$$[\mathrm{P}^{O}]:\quad Maximize \quad f^{O}(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i^{O}(x_i)$$
$$subject\ \ to \quad g^{O}(x)=\sum_{i=1}^{n} g_i^{O}(x_i)\le b^{O},$$
$$x\in K_i^{O} \quad for\ \ i=1,\dots,n,$$

ここで，

$x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$,　$K_i^{O}=\{1,2,\dots,k_i^{O}\}$

一般性を失うことなしに，

$f_i^{O}(x_i)\ge 0 \quad for \ \ x_i=1,\dots,k_i^{O}, \quad i=1,\dots,n$

$g_i^{O}(x_i)\ge 0 \quad for \ \ x_i=1,\dots,k_i^{O}, \quad i=1,\dots,n.$

を仮定する．

モジュラー法は，元問題を最初のモジュラー問題とし，$[P^{(l)}]$　$(l=1,2,\dots,n-1)$ を生成し，これは元問題 $[P^{O}]$ と同じである．これより l 番目のモジュラー問題は，以下のように書ける．

$$[\mathrm{P}^{A}]:\quad Maximize \quad f^{A}(x)=\sum_{i=1}^{n^A} f_i^{A}(x_i)$$
$$subject\ \ to \quad g^{A}(x)=\sum_{i=1}^{n^A} g_i^{A}(x_i)\le b^{A},$$
$$x\in K_i^{A} \quad for\ \ i=1,\dots,n^{A},$$

ここで，$K_i^{A}=\{1,2,\dots,k_i^{A}\}$,

であり，またすべての $i\in N^{A}$ に対して，

$g_i^{A}(1)=0, g_i^{A}(1)\le g_i^{A}(2)\le\dots g_i^{A}(k_i^{A})$ である．

3．深測操作

モジュラー法（MA）は，部分問題に対して，３つの深測操作(fathoming test)を行う．深測操作は，変数の決定空間を減少させるために行う．以下に３つの深測操作について述べる．

（1）　実行可能性操作(Feasibility test)

もし，$g_s^{A}(k)>b^{A}$ であれば，部分解 $x_s=k$ は，問題 $[P^{A}]$ に対して実行可能であり，深測操作されている．

（2）　優越操作(Dominance test)又は，整数優越

$k'\in k_s^{A}, g_s^{A}(k')\ge g_s^{A}(k)$ となるような，$k'\in k_s^{A}$ が存在するならば，部分解 $x_s=k$ は，優越され深測されている．

（3）　限界値操作(Bound test)

f^{LB} を問題 $[P^{A}]$ の下限値とする．下限値は,発見的アルゴリズム(heuristic algorithm)を使うことによって得られた，最適解に近い目的関数の値である．もし，$v^{UB}[P^{A}:x_s=k]\le f^{UB}$ ならば，部分解 $k'\in k_s^{A}$ は，深測操作されている．ここで，$v^{UB}[\circ]$ は，問題 $[\circ]$ の上限値を意味し，問題 $[P^{A}:x_s=k]$ において，上限値を効率的に求めることは重要である．上限値の計算については，次節で説明する．

4．上限値の計算

問題 $[P^{A}]$ の上限値を計算するために，モジュラー法（MA）は問題 $[P^{A}]$ において，整数優越及びDGR優越(Decreasing Gain Ratio)を使う．ここで，DGR 優越とは，

$$\frac{f_i^{A}(k)-f_i^{A}(k')}{g_i^{A}(k)-g_i^{A}(k')}\le\frac{f_i^{A}(k'')-f_i^{A}(k)}{g_i^{A}(k'')-g_i^{A}(k)}$$

となるような，$k',k''\in K_i^{A}$ が存在するならば，解 $x_i=k$ は優越されたと言う．

ここで問題 $[P^{A}]$ に，整数優越，DGR優越を適用した後，次のような非線型ナップザック問題を得る．

ここで，

$$[\mathrm{P}^{B}(b^{B})]: Maximize \quad f^{B}(x)=\sum_{i=1}^{n^A} f_i^{B}(x_i)$$
$$subject\ \ to \quad g^{B}(x)=\sum_{i=1}^{n^A} g_i^{B}(x_i)\le b^{B},$$
$$x\in\{K_i^{B}=1,2,\dots k_i^{B}\} \quad for\ \ i=1,\dots,n^{A},$$

$f_i^B(k) < f_i^B(k+1)$ for $k \in \{1,2,\ldots,k_i^B-1\}, i=1,\ldots,n^A$,
$g_i^B(k) < g_i^B(k+1)$ for $k \in \{1,2,\ldots,k_i^B-1\}, i=1,\ldots,n^A$,
$w_i(k) < w_i(k+1)$ for $k \in \{2,3,\ldots,k_i^B-1\}, i=1,\ldots,n^A$,

$$w_i(k) = \frac{f_i^B(k) - f_i^B(k-1)}{g_i^B(k) - g_i^B(k-1)}$$

次に，よく知られたgreedyアルゴリズムにおいてFox[3]は，問題$[P^B(b^B)]$に対して，次のようなgreedy解x^Gとした．

$$\min_{i=1,2,\ldots,n^A}\{w_i(x_i^G)\} > w_{i^*}(x_{i^*}^G+1),$$

$$0 \le b^B - \sum_{i=1}^{n} g_i^B(x_i^G) < g_{i^*}^B(x_{i^*}^G+1)$$

ここで，i^*は，

$$w_{i^*}(x_{i^*}^G+1) = \max_{i=1,2,\ldots,n^A}\{w_i(x_i^G+1)\}$$

得られたgreedy解は，暫定解として更新される．問題$[P^B(b^B)]$の上限値は，x^Gを使うことによって得られる．

$$f^R = \sum_{i=1}^{n^A} f_i^B(x_i^G) + w_{i^*}(x_{i^*}^G+1)(b^B - \sum_{i=1}^{n^A} g_i^B(x_i^G))$$

また，Sinha-Zolther[4]は，より厳密な上限値を以下のように与えている．

$$f^{UB} = \max\{U^1, U^2\}$$

ここで，

$$U^1 = f^R - (w_{i^*}(x_{i^*}^G+1) - w_{i_{Next}}(x_{i_{Next}}^G+1))(h - g_{i^*}^A(p)),$$
$$U^2 = f^R - (w_{i_{Prev}}(x_{i_{Prev}}^G) - w_{i^*}(x_{i^*}^G+1))(g_{i^*}^A(p+1) - h)$$

上記で挙げたように，限界値テストのために上限値を計算することは重要である．その上限値を計算する上で，より強い上限値の計算手法を以下で説明する．

○変数固定式上限値計算法

問題$[P^B(b^B)]$において，

（1）$K_i^B(i \in N)$を2グループに分ける．

$$K_i^U = \{k \in K_i^B \mid \Psi_i(k) > \Psi_{i^*}(x_{i^*}^G)\}$$
$$K_i^L = \{k \in K_i^B \mid \Psi_i(k) \le \Psi_{i^*}(x_{i^*}^G)\}$$

（2）$K_i^U(i \in N)$に対して，数列

$N^U = \{s(1), s(2), \ldots, s(n^U)\} \subseteq N$を

$$\min_{k \in K_{s(l)}^U}\{\Psi_{s(l)}(k)\} \le \min_{k \in K_{s(l+1)}^U}\{\Psi_{s(l+1)}(k)\}$$

となるように決定し，同様にK_i^Lに対して，数列$N^L = \{t(1), t(2), \ldots, t(n^L)\} \subseteq N$を

$$\max_{k \in K_{t(l)}^L}\{\Psi_{t(l)}(k)\} \ge \max_{k \in K_{t(l+1)}^L}\{\Psi_{t(l+1)}(k)\}$$

となるように決める．

（3）N^U, N^Lに同じ要素がある場合は，

例えば，$s(l^U) = t(l^L)$のような場合，

① $l^U < l^L$であれば，$t(l^L)$をN^Lから除く．

② $l^U = l^L$であれば，N^UとN^Lの要素の多い方から除く．

（4）固定する変数分だけ，前から順番にN^U, N^Lを取っていく．

（5）組み合わせを作って，計算し，f^Rを最小に取るものを，上限値とする．

以上のような手順を踏むことにより，より強い上限値を求めることができると考える．

5. おわりに

本論においては，前節で述べた手法により，モジュラー法（MA）において，より強い上限値を求めることができることを，計算機実験を行い報告する．今後の課題としては，前節の上限値手法を用いて，実際問題に適用して，評価していきたいと考える．

6. 参考文献

[1] 仲川勇二：“離散最適化問題のための新解法“電子情報通信学会論文誌 Vol.J 73-A No.3 pp.550-556 (1990.3)

[2] Y.Nakagawa and A.Iwasaki : “Modular Approach for Solving NonlinearKnaps-ack Problems”IEICETRANS.FUNDAMENTALS,VOL.E82-A,NO.9 SEP (1999)

[3] B.Fox : “Discrete optimization via marginalanalysis” Manag.Sci,vol.13 (1966)

[4] P.Sinha and A.Zoltners : “The Multiple-Choise Knapsack Problem ”Oper.Res,v-ol.27 pp.125-131 (1979)