不連続点の親の中には不連続点が存在する

0 1 5 0 4 3 6 4　近畿大学・商経学部　林 芳男　HAYASHI Yoshio

(実係数の) 0-1ナップザック問題 $f(M)=Min\{p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n : w_1x_1+w_2x_2+\cdots+w_nx_n \leqq M, x_j=0$又は$1(j=1,2,\cdots,n)\}$(ここに、問題のデータは正の実数の価値ベクトル$p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$と重みベクトル$w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$と正の実数の容量$M$である)についての私の研究(林(1994;103頁の命題3．1)とワーキングペーパー(1997,1998改訂版))の中で分割$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$が存在する右辺の数M(、つまり、$M=w\cdot x$)で$x_k=1$ならば$M-w_k$はMの親、逆にMは$M-w_k$の子供と呼んで
主張Ｉ：「不連続点の親は不連続点である」
と主張した。実はこれはそのワーキングペーパーのレフリーの指摘で誤りであることが判明しました。このような主張をした理由は
主張II：「0でない右辺の数Mに対する問題$f(M)$の最適解をx、その第k成分x_kが0でない(つまり、1である)とすると、最適性原理により、$x-e^{(k)}$は問題$f(M-w_k)$の最適解となり

$$f(M)=f(M-w_k)+p_k \tag{1}$$

が成り立つ、ここに、$e^{(k)}$は第k成分だけが1、その他の成分が0であるn次元単位ベクトルである」(林(1994;命題)
と考えたからである。この誤解の下、0-1ナップザック関数$f(\cdot)$の不連続点の間に木構造が定義できるという前提でそれらの論文の中ですべての不連続点を生成し木構造で記憶するというアルゴリズムを展開した。この発表では最適性原理についてのそのような誤りを何故したか、そもそも不連続点の間に木構造は定義できるのかということについて論じ、表題のような主張に訂正して目標の不連続点の間の木構造が定義できることを示す。

先ずは主張Ｉの反例をそのレフリーから頂きます。
例題１(主張Ｉの反例)。$f(M)=Max\{12x_1+10x_2+11x_3 : 5x_1+7x_2+8x_3 \leqq M, x_j=0$又は$1(j=1,2,3)\}$という0-1ナップザック問題を考えよう。ここに、その変数は(価値/重さ)比率が　$p_1/w_1 \geqq p_2/w_2 \geqq p_3/w_3$であるように、実際、$12/5(=2.4)>10/7(=1.42\cdots)>11/8(=1.375)$であるように添字が付けられている。したがって、私の結果、ワーキングペーパー(1998改訂版;Prop.4.1)又は林(1997;命題4.1)により貪欲解法で最適に解ける「問題$f(M)$」($M=5,12,20$)の右辺の数$M=5,12,20$は0-1ナップザック関数$f(\cdot)$の不連続点で$f(5)=12$に対応する最適解は$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$、$f(12)=22$に対応する最適解は$(x_1,x_2,x_3)=(1,1,0)$である。後者の問題「$f(12)$」に注目しよう。不連続点$M=12$の親には5と7の二つがある。問題「$f(7)$」は手計算で容易に解けて$f(7)=12$でその最適解は$(x_1,x_2,x_3)=(1,0,0)$であることが分かる。つまり、つまり、右辺の数$M=7$は0-1ナップザック関数$f(\cdot)$の連続点であるのに、主張Ｉは『問題「$f(12)$」の最適解$(x_1,x_2,x_3)=(1,1,0)$の中で$x_1=1$であるから$12-w_1=7$も不連続点だ』とするものであったから間違っていたのである。また、$f(12)(=22)\neq$(もっと正確には<) $f(7)+p_1(=24)$なのである。□

さて、最適性原理(主張II)は任意の非負の整数値を取ることが出来る(無制限)整数ナップザック問題では成り立つ。記号をそのまま援用して証明すると：もし$x-e^{(k)}$が問題$f(M-w_k)$の最適解でないとすると本当の最適解x'が存在して$f(M-w_k)=p\cdot x'>p\cdot(x-e^{(k)})=p\cdot x-p_k=f(M)-p_k$となる。そうすると$x'+e^{(k)}$は問題$f(M)$の

実行可能解でその目的関数の値は $p\cdot(x'+e^{(k)})= f(M-w_k)+p_k>f(M)$となって$x$が問題$f(M)$の最適解であったという仮定に矛盾するからである。この証明を注意深く読めば「$x'+e^{(k)}$は問題$f(M)$の実行可能解で」という部分が*0-1*問題では、或いはもう少し一般化した変数の取る値に上限が設けられている整数計画問題に対しては一般的には成り立たないことが分かる。もしx'の中で品目kを使っていたら、つまり、$x'_k=1$であったら問題$f(M)$のx'からの解の構成では品目kを使ってはいけないのである。したがって、*0-1*ナップザック問題ではここで述べたような最適性原理は「$x-e^{(k)}$が問題$f(M-w_k)$の$x_k=0$なる最適解」でなければ成り立たないのである。「最適性原理」というのは最適解の途中経過も最適であるという主張であるから、そのように考えてしまったのが私の誤解の原因であった。*0-1*ナップザック問題の場合その品目kは*2*個以上いれることはできない訳で、それは$x_k\neq 1$という条件の下で成立することであったのである。したがって、「問題$f(M-w_k)$」のどの最適解x'でも$x'_k=1$となるならばその主張は成立しない。

*0-1*ナップザック問題と整数ナップザック問題とのもう一つの大きな違いは、*0-1*ナップザック問題では重み係数の集合は多重集合であるのに対し、整数ナップザック問題では多重集合の重み係数は意味がないことである。もし整数ナップザック問題で$w_i=w_j$で$p_i\leqq p_j$であるとしたら品目iは全く使う必要がない、つまり、$x_i=0$なる最適解が存在する。このように整数ナップザック問題では被優越な品目は存在しないのと同等であるのに対し、*0-1*ナップザック問題では右辺の数Mの大きさによっては被優越な品目まで駆り出してその隙間を埋めないといけないことがあるのである。

主張Ⅰは表題のように緩めることで成り立たせることが出来る(例題１の場合、不連続点$M=12$の親*5*と*7*の内*5*が不連続点である)。*0-1*ナップザック問題は林(1997)で定義した***0-1*ナップザック・ネットワーク**上の最大価値経路問題に帰着できることを指摘した。その論文で展開した最短経路を求めるDijkstra(1959)風のアルゴリズムを若干修正することで構成的に与えられた右辺の数M以下のすべての不連続点が木構造で記憶できることを指摘しておく。詳細に付いては研究発表会場でお知らせします。

また、**(1)が成り立つための必要十分条件は「問題$f(M-w_k)$に$x_k=0$なる最適解が存在し、問題$f(M)$に$x_k=1$なる最適解が存在する」こと**であるということも指摘しておく。その証明は、問題$f(M-w_k)$に$x_k=0$なる最適解xが存在するならば$x+e^{(k)}$は問題$f(M)$に対して実行可能であるから$f(M)\geqq f(M-w_k)+p_k$となり、問題$f(M)$に$x_k=1$なる最適解xが存在するならば$x-e^{(k)}$は問題$f(M-w_k)$に対して実行可能であるから$f(M-w_k)\geqq f(M)-p_k$となるということでできる。

参考文献

林 芳男「*0-1*ナップザック関数のすべての不連続点を見つける一つの方法」近畿大学商経学会、商経学叢第41巻第３号、*1995年３月*、*97-110*；

林 芳男「*0-1*ナップザック問題の重み集合とその性質」近畿大学商経学会、商経学叢第42巻第１号、*1995年７月*、*139-151*；

林 芳男「実係数の*0-1*ナップザック問題を最大価値経路に帰着させて解く方法」近畿大学商経学会、商経学叢第*44*巻第*2*号,*1997年12月*,*141-159*；

Hayashi, Y.,"Solving the Real Coefficient 0-1 Knapsack Problem via a Maximal Value Path Formulation, Working Paper No.0029(1997)(改訂版1998), School of Business and Economics, Kinki University.