1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

配置の経営戦略

01302694 大阪府大総科 寺岡義伸 TERAOKA Yoshinobu
01507094 大阪府大総科 北條仁志 HOHJO Hitoshi

1 はじめに

近年コンピュータ科学と社会の複雑化に伴い、施設の最適配置を考える問題が注目され Location Sciences という雑誌まで発行されている。この種の問題は、人類が住居を持つようになってからずっと考察の対象となってきたはずであるが、初めて科学的に取り扱われたのは1929年の Hotelling[1] の研究であろう。しかし当時は時代の要請や計算の方法が今一つということもあり、本格的に取り組まれたのはここ20年のことである。

ところで、これら配置問題の多くは、平面上の与えられた範囲の中で１つまたは複数の施設をどの位置に配置すべきかといったものであり、ホテルやデパートの中のトイレやレストランあるいは集中冷暖房のための施設といった空間内の与えられた範囲内の中である施設をどの位置に配置すべきかといった問題はあまり見られない。しかしながら、ホテルを例にとるとレストランやバー（あるいは居酒屋）だけでなく、さらには集会室を何階のどの位置に配置するかで外からの客の利用量が大きく変わってくる。その結果が宿泊利用者数にまで大きく関係してくる。デパートにおいても同様であろう。そしてその配置の構造を検討していくと、室外に minmax 型配置、maxmin 配置、最上階配置、グランドフロー配置、といった min や max の組合せに基礎を置く配置が多いことに気がつく。

2 空間内での minmax 配置

2.1 ユークリッド距離による minimax 配置

まず、$D \subset \boldsymbol{R}^2$の時を扱う。

定義 1. D 内のすべての需要点を周および内部に含むような円の中で半径が最小な円を最小被覆円と呼ぶ。

性質 1. 最小被覆円をその中心を通る直線で２つの半円に分割すると、各々の半円は分割した境界も含めると、その半円周上に少なくとも１つ D 内の需要点を含む。

結果 1. 最小被覆円の中心を O とする。O が D に含まれるならば O は $minimax$ 配置問題の解となる。即ち、O は (1) 式を満たす$\boldsymbol{x}$を与える。

最小被覆円の中心が定められた範囲 D 内にあると仮定することは極めて自然なことである。しかし D 内に配置禁止地域を考えるのも興味深い [4]。

次に $D \subset \boldsymbol{R}^3$へ拡張する。

定義 2. D 内のすべての需要点をその球面および内部に含む球の中で半径が最小な球を最小被覆球と呼ぶ。

性質 2. 最小被覆球をその中心を通る平面で２つの半球に分割すると、各々の半球は分割によって生じた境界を含めるとその半球面上に少なくとも１つ D 内の需要点をふくむ。

結果 2. 最小被覆球の中心を O とする。O が D に含まれるならば O は $minmimax$ 配置問題の解となる。即ち O は (1) 式を満たす$\boldsymbol{x}$を与える。

2.2 直角距離による minimax 配置

前節と同様にまず $D \subset \boldsymbol{R}^2$の時を扱う。よく知られたことではあるが、$\boldsymbol{R}^2$上の２点から等距離にある点の集合は、この２点を結ぶ線分の垂直２等分線は成立しない。

ここで、需要点$\boldsymbol{a}_i$の座標を (α_i, β_i) とするとき

$$p_1 = \max_i(\alpha_i + \beta_i), p_2 = \min_i(\alpha_i + \beta_i)$$

$$q_1 = \max_i(\alpha_i - \beta_i), q_2 = \min_i(\alpha_i - \beta_i)$$

とおくと、4 つの直線 $x + y = p_1, x + y = p_2, x - y = q_1, x - y = q_2$によって囲まれる長方形は直角距離の意味で D 内のすべての需要点を含む最小被覆円ということになる。ここではこれを最小被覆長方形と呼ぶことにする。

性質 3. $D \subset \boldsymbol{R}^2$内のすべての需要点を含む最小被覆長方形は 4 点 $(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_1-q_1}{2}), (\frac{p_1+q_2}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}), (\frac{p_2+q_2}{2}, \frac{p_2-q_2}{2}), (\frac{p_2+q_1}{2}, \frac{p_2-q_1}{2})$ を頂点とする長方形である。

結果 3.直角距離による *minimax* 配置問題の解 ((1) 式を満足する$\boldsymbol{x}$) は下記のように与えられる。

- $p_1 - p_2 > q_1 - q_2 \Rightarrow (\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2-q_1}{2})$ と $(\frac{p_2+q_2}{2}, \frac{p_1-q_2}{2})$ を結ぶ線分上のすべての点
- $p_1 - p_2 = q_1 - q_2 \Rightarrow$ 点 $(\frac{p_1+p_2+q_1+q_2}{4}, \frac{p_1+p_2-q_1-q_2}{4})$
- $p_1 - p_2 < q_1 - q_2 \Rightarrow (\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_1-q_2}{2})$ と $(\frac{p_2+q_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2})$ を結ぶ線分上のすべての点

次いで、$D \subset \boldsymbol{R}^3$の場合を考える。この場合も$\boldsymbol{R}^3$上の 2 点から等距離にある点の集合は、2 点を結ぶ線分の中点を通り、この線分と垂直な平面は成立しない。前と同様に需要点$\boldsymbol{a}_i$の座標を $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)$ とし

$$p_1 = \max_i(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i), p_2 = \min_i(\alpha_i + \beta_i + \gamma_i),$$

$$q_1 = \max_i(\alpha_i - \beta_i + \gamma_i), q_2 = \min_i(\alpha_i - \beta_i + \gamma_i),$$

$$r_1 = \max_i(\alpha_i + \beta_i - \gamma_i), r_2 = \min_i(\alpha_i + \beta_i - \gamma_i)$$

とおくと、6 つの平面 $x+y+z = p_1, x+y+z = p_2, x-y+z = q_1, x-y+z = q_2, x+y-z = r_1, x+y-z = r_2$によって囲まれる平行六面体は直角距離の意味で D 内のすべての需要点を含む最小被覆円ということになる。この平行六面体を最小被覆平行六面体と呼ぶことにする。

性質 4.$D \subset \boldsymbol{R}^3$内のすべての需要点を含む最小被覆平行六面体は 8 つの点
$(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_1-q_1}{2}, \frac{p_1-r_1}{2}), (\frac{q_2+r_1}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}, \frac{p_1-r_1}{2}),$
$(\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}, \frac{p_1-r_2}{2}), (\frac{q_1+r_2}{2}, \frac{p_1-q_1}{2}, \frac{p_1-r_2}{2}),$
$(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_2-r_1}{2}), (\frac{q_2+r_1}{2}, \frac{p_2-q_2}{2}, \frac{p_2-r_1}{2}),$
$(\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_2-q_2}{2}, \frac{p_2-r_2}{2}), (\frac{q_1+r_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_2-r_2}{2})$
を頂点とする平行六面体である。

結果 4.直角距離による *minimax* 配置問題の解は下記のように与えられる。

- $p_1 - p_2 > \max(q_1 - q_2, r_1 - r_2) \Rightarrow 4$ 点 $(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_1-q_1}{2}, \frac{p_2-r_2}{2}), (\frac{q_1+r_2}{2}, \frac{p_2-q_2}{2}, \frac{p_1-r_1}{2}),$ $(\frac{q_2+r_1}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}, \frac{p_2-r_2}{2}), (\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_2-q_2}{2}, \frac{p_1-r_1}{2})$ を頂点とする平行四辺形上のすべての点
- $q_1 - q_2 > \max(r_1 - r_2, p_1 - p_2) \Rightarrow 4$ 点 $(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}, \frac{p_2-r_1}{2}), (\frac{q_1+r_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_1-r_1}{2}),$ $(\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_1-q_2}{2}, \frac{p_2-r_2}{2}), (\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_1-r_2}{2})$ を頂点とする平行四辺形上のすべての点
- $r_1 - r_2 > \max(p_1 - p_2, q_1 - q_2) \Rightarrow 4$ 点 $(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_1-q_1}{2}, \frac{p_2-r_2}{2}), (\frac{q_1+r_2}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_1-r_2}{2}),$ $(\frac{q_1+r_1}{2}, \frac{p_2-q_1}{2}, \frac{p_2-r_2}{2}), (\frac{q_2+r_2}{2}, \frac{p_2-q_2}{2}, \frac{p_2-r_1}{2})$ を頂点とする平行四辺形上のすべての点
- $p_1 - p_2 = q_1 = q_2 = r_1 - r_2 \Rightarrow$ $(\frac{q_1+q_2+r_1+r_2}{2}, \frac{p_1+p_2-q_1-q_2}{2}, \frac{p_1+p_2-r_1-r_2}{2})$

3 maxmin 配置問題

この場合、問題の性質から maxmin 配置問題の解は以下の性質から導かれるように考えられる。

性質 5.l_1ノルムであっても l_2ノルムであっても、需要点を内部に含まず需要点あるいは D の境界上の点を少なくとも 3 点をその周上に含む円は必ず存在する。

ユークリッド距離 (l_2ノルム) に関しては次の結果が成立する。

結果 5.需要点あるいは D の境界上の点を少なくとも 3 点をその周上に含み内部には需要点を含まない円の中で半径の最大の円の中心は *maxmin* 配置問題の解の候補である。

この結果は直角距離 (l_1ノルム) の場合にもそのままあてはめることができる。しかし、具体的にこのような円をどうやって見つけ出すかが問題となる。

4 ビル内での経営的配置

参考文献

[1] H. Hotelling,"Stability in competition", The Economic Journal Vol.30(1929),pp.41-57.

[2] J. Elzinga and D.W. Hearn,"Geometric solution for some minimax Location problems",Trans.Sci. Vol.6(1972),pp.379-394.

[3] M.I. Shamos and D. Hoey,"Closest-point problems",16th IEEE Ann.Symp.Found.Comput.Sci.(1975),pp151-162.

[4] S. Osumi,"Modeling amd Analysis of Competitive Facility Location Problem",大阪府立大学博士学位論文 (1997).