1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

必要不可欠ではない需要に対する競合施設配置問題

01013344　神戸芸術工科大学　*大角 盛広　(OSUMI Shigehiro)
01204084　神戸学院大学　塩出 省吾　(SHIODE Shogo)

1　はじめに

競合施設配置問題の研究は Nash 均衡を扱った Hotelling [3] の論文に始まり、交互競合配置問題での Stackelberg 均衡を扱った Hakimi [2] や Drezner [1] の論文などがある。

ここでは利用者の利用意欲が施設からある程度以上離れていると距離に応じて低減するというモデルを考えた。すなわち、「十分近い」と感じる利用圏では必ず利用するが、それを外れると距離に対して線形に利用意欲が衰えるものとする。このような場合での、競合する施設の交互配置問題を考える。先手の施設は後手の施設の配置を考慮した上で自らの配置を決定しなければならない。利用者は近いと感じる施設だけを利用するが、2つの施設の利用圏が重なる場合には、ある割合で利用者が双方に分かれるものとする。

市場として需要点が離散的に分布する直線を考える。これは道路や線路上の市場をモデル化したものと考えられる。需要点は等間隔に並んでいると仮定する。これは平面でメッシュデータが与えられる場合と同様、単位区画でのデータが与えられている場合のモデルとなる。

以上のモデルにおいて、後手施設の最適配置を求める問題を Medianoid 問題、先手施設の最適配置を求める問題を Centroid 問題として定式化し、その性質と解法を考察した。

2　定式化

$a_i \cdots a_n$:　需要点の位置

$w_i \cdots w_n$:　a_iに付随する重み

x, y :　先手施設 X、後手施設 Yの位置

十分に近いと感じる距離を d_0、遠すぎると感じる距離を d_0+d_1とし、施設が位置 x にあるとき位置 u の利用者の利用率を次のように定義する。

$$f(x,u)=\begin{cases}1, & |x-u|<d_0\\ 0, & |x-u|>d_0+d_1\\ 1-\dfrac{u-d_0}{d_1}, & \text{otherwise}\end{cases}$$

領域 $\{u|f(x,u)>0\}$ のことを Xの利用圏と呼ぶ。X, Yの利用圏が重なる場合の需要の配分方法として、a_iの位置での Xに対する利用率と Yに対する利用率をそれぞれα_1, α_2 とすると、Xと Yはそれぞれ $(\alpha_1-\alpha_2/2)w_i$と $(\alpha_2/2)w_i$ずつの重みを獲得するものと考える。

利用圏の重なり方によって配分のされ方が異なるため、施設 Xに対して以下の領域を定義する。

$$\begin{aligned}X_A &= \{u|f(x,u)=f(y,u)=1\}\\ X_B &= \{u|f(x,u)=1, f(y,u)=0\}\\ X_C &= \{u|f(x,u)=1, 0<f(y,u)<1\}\\ X_D &= \{u|f(x,u)>f(y,u), 0<f(y,u), f(x,u)<1\}\\ X_E &= \{u|0<f(x,u)<1, f(y,u)=0\}\end{aligned}$$

同様に $Y_A \cdots Y_E$も定義する。また、領域が2つに分断され左右の区別が必要な場合は、x座標の小さい方を X_E^-、大きい方を X_E^+のように表す。また、$x+d_0, x-d_0$の位置を X^+, X^-と表し $x-d_0-d_1, x+d_0+d_1$の位置を X_-, X_+と表す。

先手 Xの配置 x が決まった場合、後手 Yが yの位置で獲得できる重み W_yは以下のように表される。

$$\begin{aligned}W_y(x,y) &= \sum_{a_i\in Y_A}\frac{1}{2}w_i+\sum_{a_i\in Y_B}w_i\\ &+ \sum_{a_i\in Y_C}(1-\frac{1}{2}f(x,a_i))w_i\\ &+ \sum_{a_i\in Y_D}(f(y,a_i)-\frac{1}{2}f(x,a_i))w_i\\ &+ \sum_{a_i\in Y_E}f(x,a_i)w_i\end{aligned}$$

ある x に対する Medianoid 問題とは

$$W_y(x, y^*) \geq W_y(x, y) \ , \ \forall y \in \mathcal{R}$$

となる y^* を見つけることである。ここで、ある x に対する Medianoid 問題の解 y^* を $y^*(x)$ と書くと、Centroid 問題とは、

$$W_x(x^*, y^*(x^*)) \geq W_x(x, y^*(x)) \ , \ \forall x \in \mathcal{R}$$

を満たす x^* を見つけることであると定式化できる。

3 解の性質と解法

性質 1 Medianoid 問題の解のひとつは、Y^+, Y^-, Y_-, Y_+ のいずれか、あるいは $\frac{1}{2}(x+y)$ を需要点 a_i 上に重ねるような点である。

性質 2 Centroid 問題の解のひとつは、X^+, X^-, X_-, X_+ のいずれか、あるいは $\frac{1}{2}(x+y)$ を需要点 a_i 上に重ねるような点である。

需要点の重みの分布に何の仮定も設けない場合は、これらの性質を用いても全数探索で解を求めるしかないため、ここでは需要点の重みが単峰性を持つ場合について特に考察する。すなわち、最大の重み w^0 を持つ点の位置を a^0 とし、需要点が $\cdots, a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2, \cdots$ のようにラベル付けられているとする。ここで、$x \leq a^0$ と仮定しても一般性を失わない。

需要点の間隔により以下のように場合分けを行う。

1. $|a_i - a_{i+1}| > 2d_0 + d_1$ のとき
   明らかに、$w^0 > \frac{1}{2}w^1$ ならば $Y^+ = a^0$(あるいは $Y^- = a^0$) が Medianoid 問題の解であり $X^+ = a^0$(あるいは $X^- = a^0$) が Centroid 問題の解である。それ以外の場合は、$X^+ = a^0$ が Centroid 問題の解であり $Y^+ = a^1$ が Medianoid 問題の解である。

2. $2d_0 + d_1 \geq |a_i - a_{i+1}| > 2d_0$ のとき
   $a^0 - x > d_0 + d_1$ のとき、$Y^- = a^0$(あるいは $Y^+ = a^0$) が Medianoid 問題の解である。
   $d_0 < a^0 - x \leq d_0 + d_1$ のとき、$w_1 + f(y, a^2)w^2 > (1 - \frac{1}{2}f(x, a^0))w^0 + \frac{1}{2}f(y, a^1)w^1$ ならば、このとき $w^0 > \frac{1}{2}w^2$ では $Y^+ = a^1$、$w^0 \leq \frac{1}{2}w^2$ では $Y^- = a^1$ が Medianoid 問題の解となる。それ以外ならば $Y^- = a^0$ が Medianoid 問題の解である。
   $a^0 - x \leq d_0$ のとき、$w_0 > \frac{1}{2}w_1$ ならば、$w^1 > w^{-1}$ では $Y^- = a^0$ が Medianoid 問題の解であり $w^1 \leq w^{-1}$ では $Y^+ = a^0$ が解である。$w^0 \leq \frac{1}{2}w^1$ ならば、$w^2 > \frac{1}{2}w^0$ では $Y^- = a^1$ が Medianoid 問題の解であり $w^2 \leq \frac{1}{2}w^0$ では $Y^+ = a^1$ が解である。

3. $|a_i - a_{i+1}| \leq 2d_0$ のとき
   この場合は a^0 からはじめて a^1 方向に Medianoid 問題の解を探索する。$W_y(x, y)$ と $W_y(x, y + \Delta y)$ において $Y_C^+ \cup Y_D^+ \cup Y_E^+ \cup Y_B$ と $Y_C^- \cup Y_D^- \cup Y_E^-$ に属する需要点の重みを比較しながらずらしていくことになるが、具体的な探索アルゴリズムは講演で述べる。

以上の場合分けにおいて、それぞれ x に対する Medianoid 問題の解 $y^*(x)$ を求めることができ、そのときの x が Centroid 問題の解の候補となる。ここで候補の数は a_0 から $2(d_0 + d_1)$ までの距離に存在する需要点の数の 1 次式で表される。これらの候補の中で、$W_x(x, y^*(x))$ を最大にする x が Centroid 問題の解である。

4 まとめ

本研究では、必要不可欠な需要が伴わない場合の直線上での交互競合施設配置問題を考察した。需要点の分布が単峰の場合は a^0 から $4(d_0 + d_1)$ までの距離にある点 a_i について、それぞれ a_i が Y^+, Y^-, X^+, X^- に一致する点、および $a_i = \frac{1}{2}(x+y)$ となるような y, x が Medianoid 問題の解、および Centroid 問題の解の候補となることを示した。単峰が保証されない場合の解の性質の考察及び平面上への拡張が今後の課題である。

参考文献

[1] Z. Drezner : "Competitive Location Strategies for Two Facilities", Regional Science and Urban Economics Vol. 12 (1982), pp. 485-493.

[2] S.L.Hakimi, "On Locating New Facilities in a Competitive Environment", European Journal of Operational Research, Vol.12 (1983), pp. 29-35.

[3] H. Hotelling : "Stability in Competition", Economic Journal 39 (1929), pp. 41-57.

[4] 塩出省吾 : "競合状態下の配置問題", 第 4 回 RAMP シンポジウム論文集 (1992), pp. 104-115.