1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

小売業における特別展示商品に対する最適発注量
- 単位時間当り総利益の最大化 -

02103234 神戸商科大学大学院 * 川勝 英史 KAWAKATSU Hidefumi
01204194 流通科学大学情報学部 三道 弘明 SANDOH Hiroaki
01503164 神戸商科大学商経学部 濱田 年男 HAMADA Toshio

1. はじめに

筆者等は小売業において，「在庫量が多い程良く売れ，少なくなるとあまり売れなくなる」という性質を持つ商品に対する経済的発注量を提案している [1]．本研究では，単位時間当たり総利益を最大にするPOQ(Profitable Order Quantity) を求めるためのモデルを提案する．

2. モデル

本研究では以下の場合を考える．(1) 商品の需要は確定的であるが，在庫量が多い程良く売れ，在庫が少なくなるとあまり売れなくなる．(2) バックルーム在庫は認めず，最大在庫量の上限 Q_U を制約として与える．(3) 在庫水準が Q_0 となった時点で $Q-Q_0$ を発注する．従って，最大在庫量を Q とすることとなり，$0 \leq Q_0 < Q$ である．(4) リードタイムは0であり，入庫速度は無限大とする．ただし，時刻 t における累積需要量 $m(t)$ は次式を満足すると仮定する．

$$m'(t) = \lambda\,[Q - m(t)] + \mu \qquad (1)$$

式 (1) は，時刻 t における需要速度 (単位時間当り需要量) が，現在の在庫量に比例する部分 (比例定数 $\lambda > 0$) と定数 (一定の需要量 μ) とからなることを意味している．

初期条件を $m(0) = 0$ として，式 (1) の微分方程式を解くと次式を得る．

$$m(t) = (Q + \frac{\mu}{\lambda})(1 - e^{-\lambda t}) \qquad (2)$$

よって，時刻 t における在庫量を $A(t)$ とすると

$$A(t) \;=\; Q - m(t) = (Q + \tfrac{\mu}{\lambda})e^{-\lambda t} - \tfrac{\mu}{\lambda} \qquad (3)$$

となる．

以下では，単位時間当り総利益を導出する．

初めに在庫量が Q_0 となるまでに要する時間 T を求めると

$$T = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{Q+\rho}{Q_0+\rho} \qquad (4)$$

を得る．ここに，$\rho = \mu/\lambda$ である．

次に $(0, T]$ における延べの在庫量 $B(Q, Q_0)$ を求めると

$$B(Q, Q_0) = \frac{\lambda Q + \mu}{\lambda^2}(1 - e^{-\lambda T}) - \frac{\mu}{\lambda}T \qquad (5)$$

となる．よって，単位在庫の単位時間当り在庫維持管理費用を c_1，1回当り発注費用を c_2 とすると，単位時間当り総利益は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} P(Q, Q_0) &= \frac{\alpha m(T) - c_1 B(Q) - c_2}{T} \\ &= \frac{(\alpha\lambda - c_1)(Q - Q_0) - c_2\lambda}{\ln(Q+\rho) - \ln(Q_0+\rho)} + c_1\rho \qquad (6) \end{aligned}$$

ここに，α は単位商品当りの粗利益を表す．

3. 最適な最大在庫

ここでは，最大在庫量 Q に対する上限 Q_U を無視した上で，発注点 Q_0 を与えたときに，$P(Q, Q_0)$ を最大にする $Q = Q^*$ について解析を行った結果を以下にまとめる．$\beta \equiv \alpha\lambda - c_1$ とおいて，$\beta < 0$，$\beta = 0$，$\beta > 0$ のそれぞれの場合を考えることとする．

(1) $\beta < 0$ のとき，有限の $Q^*(> Q_0)$ が存在する．これを $Q^* = S_1(Q_0)$ と書くこととすると，単位時間当たり総利益は次式で与えられる．

$$P(Q^*, Q_0) = (\alpha\lambda - c_1)S_1(Q_0) + \alpha\lambda\rho \qquad (7)$$

(2) $\beta = 0$ のとき，最適解は $Q^* = +\infty$ であり，単位時間当たり総利益は次式で与えられる．

$$P(Q^*, Q_0) = c_1\rho = \alpha\lambda\rho \qquad (8)$$

(3) $\beta > 0$ のとき，最適解は $Q^* = +\infty$ であり，単位時間当り総利益は

$$P(Q^*, Q_0) = +\infty \qquad (9)$$

で与えられる．

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．

4. 最適な発注点

ここではQを与えたときの，式(6)の単位時間当たり総利益を最大にする発注点Q_0^*を求める．

$\beta < 0$のとき，$\partial P(Q,Q_0)/\partial Q_0 \geq 0$は

$$(Q_0+\rho)\ln\frac{Q+\rho}{Q_0+\rho}-(Q-Q_0) \geq -\frac{c_2\lambda}{\beta} \qquad (10)$$

に等価である．

また，$\beta > 0$のとき，$\partial P(Q,Q_0)/\partial Q_0 \geq 0$は

$$(Q_0+\rho)\ln\frac{Q+\rho}{Q_0+\rho}-(Q-Q_0) \leq -\frac{c_2\lambda}{\beta} \qquad (11)$$

に等価である．

なお，式(10)あるいは式(11)の左辺を$L(Q_0|Q)$とおく．

$\beta < 0$，$\beta = 0$，$\beta > 0$のそれぞれの場合についての解析結果を以下にまとめる．

(1) $\beta < 0$の場合，$P(Q,Q_0)$を最大にするQ_0は$Q_0^* = 0$であり，単位時間当たり総利益は

$$P(Q,Q_0^*)=\frac{(\alpha\lambda-c_1)Q-c_2\lambda}{\ln(Q+\rho)-\ln\rho}+c_1\rho \qquad (12)$$

で与えられる．

(2) $\beta = 0$の場合，$P(Q,Q_0)$を最大にするQ_0は$Q_0^* = 0$である．よって，単位時間当たり総利益は

$$P(Q,Q_0^*)=-\frac{c_2\lambda}{\ln(Q+\rho)-\ln\rho}+c_1\rho \qquad (13)$$

となる．

(3) $\beta > 0$の場合，$P(Q,Q_0)$を最大にするQ_0は以下のようになる．

(a) $L(0|Q)=\rho\ln\frac{Q+\rho}{\rho}-Q < -\frac{c_2\lambda}{\beta}$の場合．
このとき，正の$Q_0^*(<Q)$が存在する．このQ_0^*を$S_2(Q)$と書くこととすると，単位時間当たり総利益$P(Q,Q_0^*)$は

$$P(Q,Q_0^*)=(\alpha\lambda-c_1)S_2(Q)+\alpha\lambda\rho \qquad (14)$$

で与えられる．

(b) $L(0|Q)=\rho\ln\frac{Q+\rho}{\rho}-Q \geq -\frac{c_2\lambda}{\beta}$の場合．
このとき，$P(Q,Q_0)$を最大にするQ_0は$Q_0^* = 0$であり，単位時間当たり総利益は

$$P(Q,Q_0^*)=\frac{(\alpha\lambda-c_1)Q-c_2\lambda}{\ln(Q+\rho)-\ln\rho}+c_1\rho \qquad (15)$$

で与えられる．

5. 最適政策

最大在庫量Qに対する上限Q_Uを考慮すると，3.，4.の解析結果より，最適政策(Q^{**},Q_0^{**})は以下のようになる．

(1) $\beta < 0$のとき，$Q_0^{**} = 0$であり，Q^{**}は次式で与えられる．

$$Q^{**}=\begin{cases} S_1(0), & S_1(0) \leq Q_U \\ Q_U, & S_1(0) > Q_U \end{cases} \qquad (16)$$

このときの単位時間当たり総利益は式(7)，式(12)より

$$P(Q^{**},Q_0^{**}) = \begin{cases} (\alpha\lambda-c_1)S_1(0)+\alpha\lambda\rho, & S_1(0) \leq Q_U \\ \frac{(\alpha\lambda-c_1)Q_U-c_2\lambda}{\ln(Q_U+\rho)-\ln\rho}+c_1\rho, & S_1(0) > Q_U \end{cases} \qquad (17)$$

で与えられる．

(2) $\beta = 0$のとき，最適政策は$(Q^{**},Q_0^{**})=(Q_U,0)$である．このときの単位時間当たり総利益は

$$P(Q^{**},Q_0^{**})=-\frac{c_2\lambda}{\ln(Q_U+\rho)-\ln\rho}+c_1\rho \qquad (18)$$

で与えられる．

(3) $\beta > 0$のとき，最適政策は以下のようになる．

(a) $L(0|Q_U) < -\frac{c_2\lambda}{\beta}$の場合．
この場合，最適政策は$(Q^{**},Q_0^{**}) = (Q_U, S_2(Q_U))$である．このときの単位時間当り総利益は

$$P(Q^{**},Q_0^{**})=(\alpha\lambda-c_1)S_2(Q_U)+\alpha\lambda\rho \qquad (19)$$

で与えられる．

(b) $L(0|Q_U) < -\frac{c_2\lambda}{\beta}$の場合．
この場合，最適政策は$(Q^{**},Q_0^{**})=(Q_U,0)$である．このときの単位時間当り総利益は

$$P(Q^{**},Q_0^{**})=\frac{(\alpha\lambda-c_1)Q_U-c_2\lambda}{\ln(Q_U+\rho)-\ln\rho}+c_1\rho \qquad (20)$$

で与えられる．

なお，紙数の都合上，数値例は当日発表させて頂く．

参考文献

[1] 川勝，三道，濱田，小売業における特別展示商品に対する経済的発注量，日本OR学会秋季研究発表会アブストラクト集，(1998)，68-69.

© 日本オペレーションズ・リサーチ学会．無断複写・複製・転載を禁ず．