1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

A CLASS OF SECRETARY PROBLEMS ON SEQUENCES OF CONTINUOUS BIVARIATE RANDOM VARIABLES

01200424 坂口 実 SAKAGUCHI Minoru
01503164 神戸商科大学 ＊濱田年男 HAMADA Toshio

1. はじめに

逐次出現するn人の候補の中から，1人の秘書を選択する．個々の候補は2つの属性(X_i, Y_i)を持っている．このとき次の2つの問題

$$(1^\circ) \qquad E\left[X_\tau I(Y_\tau \geq a)\right] \longrightarrow \max_\tau,$$

$$(2^\circ) \quad \mathrm{Pr.}\left\{X_\tau = \max_{1 \leq t \leq n} X_t \;\&\; Y_\tau \geq a\right\} \longrightarrow \max_\tau$$

を考える．ここに$I(e)$は事象eの定義関数であり，$a > 0$は定数である．本研究はSakaguchi and Szajowski [4] に続くものである．

2. 条件$Y \geq a$の下でのより良いXの選択．

確率変数の対$\{(X_i, Y_i)\}_{i=1}^n$に対して$Y_\tau \geq a$の下でEX_τを最大にするようなτを求める．もし，$(n-1)$番目までに停止しなければ，(X_n, Y_n)において停止する．ここで，V_nは最適停止規則を用いたときの期待利得とすると，

$$\begin{aligned} V_1 &= E\left[XI(Y \geq a)\right] \\ V_n &= E\left[XI(Y \geq a) \vee V_{n-1}\right] \\ &= T_a(V_{n-1}) + V_{n-1}, \; (n = 2, 3, 4, \cdots) \end{aligned} \tag{1}$$

ここにsと$a > 0$に対して，

$$T_a(s) \equiv E\left[\{XI(Y \geq a) - s\}^+\right] \tag{2}$$

2.1 2変量一様分布の場合

$[0,1]^2$上の密度関数

$$p(x,y) = 1 + \gamma(1-2x)(1-2y), \quad |\gamma| \leq 1, \tag{3}$$

をもつ2変量一様分布に対して，

$$q(x) \equiv \int_0^a p(x,y)dy = \bar{a}\left\{1 - \gamma a(1-2x)\right\}$$

とする．この場合は

$$T_a(s) = (1-s)^2\left\{\frac{1}{2}\bar{a} + \frac{1}{6}\gamma a \bar{a}(1+2s)\right\}.$$

したがって

$$V_1 = E\left[XI(Y \geq a)\right] = \bar{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\gamma a\right)$$

および，$n = 2, 3, 4, \cdots$に対して

$$V_n = \frac{\bar{a}}{2}(1-V_{n-1})^2\left\{1 + \frac{\gamma a(1+2V_{n-1})}{3}\right\} + V_{n-1} \tag{4}$$

となり，次の定理が成立する．

定理.1 2変量一様分布(3)に対する問題(1°)の最適停止規則は「もし$X \geq V_{n-1}$かつ$Y \geq a$ならば停止する．さもなければ継続する.」である．ここに$\{V_n\}$は再帰式(4)により決定される．n候補の場合の最適期待利得はV_nである．

2.2 2変量正規分布の場合

$(-\infty, \infty)^2$上で密度関数

$$p(x,y) = \phi(x)\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\phi\left(\frac{y-\rho x}{\sqrt{1-\rho^2}}\right) \tag{5}$$

をもつ2変量正規分布を考える．ここに$\phi(x) \equiv (2\pi)^{-1/2}e^{-(1/2)x^2}$である．$\Phi(a) \equiv \int_{-\infty}^a \phi(y)dy$,

$$\int_s^\infty (x-s)\phi(x)dx = \phi(s) - s\,\bar{\Phi}(s) \equiv \Psi(s), \tag{6}$$

とすると

$$T_a(s) = \sqrt{1-\rho^2}\int_a^\infty \phi(y)\Psi\left(\frac{s-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)dy + (-s)^+\Phi(a). \tag{7}$$

ここに，$\Psi(s)$についてはDeGroot [1; Section 13.4 ~ 13.6]，またはSakaguchi [3] を参照.

(7)と(2)より，$\{V_n\}$は$V_1 = \rho\phi(a)$より始まる増加列である．

定理.2 (5)で表される2変量正規分布に対する最適停止規則は「もし$X \geq V_{n-1}$かつ$Y \geq a$ならば停止する．さもなければ，継続する.」ここに$\{V_n\}$は再帰式

$$V_n = \sqrt{1-\rho^2}\int_a^\infty \phi(y)\Psi\left(\frac{V_{n-1}-\rho y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)dy + (-V_{n-1})^+\Phi(a) + V_{n-1} \tag{8}$$

によって決定される．n候補の場合の最適期待利得はV_nである．もし$\rho = 0$のとき，(8)は

$$V_n = \bar{\Phi}(a)\left\{\Psi(V_{n-1}) + V_{n-1}\right\} + \Phi(a)V_{n-1}^+ \tag{9}$$

3. 条件$Y \geq a$の下での最良のXの選択

問題(2°)の解τを求める．ここで，状態$(x|n,i)$は$X_i = \max(X_1, X_2, \cdots, X_i) = x$かつ$Y_i \geq a$を表すものとする．また，$v_{n,i}(x)$は状態$(x|n,i)$のときに最適規則を用いたときの$n$候補問題の期待利得とする．

3.1 密度関数(3)の2変量一様分布

この場合の最適方程式は

$$v_{n,i}(x) = \max\left[x^{n-i}, \sum_{j=i+1}^{n} x^{j-i-1}\int_x^1 q(z)v_{n,j}(z)dz\right] \tag{10}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n; 0 \leq x \leq 1; v_{n,n}(x) \equiv 1)$$

となり(Ross [2]; pp.137-139)，OLA停止領域Bは

$$B \equiv \left\{(x|n,i)\left|x^{n-i} \geq \sum_{j=i+1}^{n} x^{j-i-1}\int_x^1 q(z)z^{n-j}dz\right.\right\}$$

$$= \left\{(x|j)\left|1/\bar{a} \geq K_j(x)\right.\right\}, \tag{11}$$

ここに

$$K_j(x) = (1-\gamma a)\sum_{m=1}^{j}\frac{x^{-m}-1}{m} + 2\gamma ax\sum_{m=2}^{j+1}\frac{x^{-m}-1}{m}.$$

補題.1　$|\gamma| \leq 1$に対して(11)により与えられる領域Bは閉じている．すなわち，一度Bに入ったら，状態はBから外へ出ない．

定理3.　最適方程式(10)に対する最適停止規則は，$Y_i \geq a$かつ$X_i = \max_{1\leq t\leq i} X_t > d_{n-i}$を満足する最初の$(X_i, Y_i)$において停止することである．ここに$d_j$ $(j = 1, 2, 3, \cdots)$は方程式$K_j(x) = (\bar{a})^{-1}$の区間$[0, 1]$内の唯一の根である．

例1. $n = 5$, $\gamma = 0.5$, $a = 0.6$に対する最適停止規則は:「もし$Y_1 \geq 0.6$ & $X_1 \geq 0.728$ならば終了．さもなければ，(X_2, Y_2)を観察．その結果もし$Y_2 \geq 0.6$ & $X_2 \geq X_1 \vee 0.651$ならば終了．さもなければ，(X_3, Y_3)を観察．その結果もし$Y_3 \geq 0.6$ & $X_3 \geq X_1 \vee X_2 \vee 0.531$ならば終了．さもなければ$(X_4, Y_4)$を観察．その結果もし$Y_4 \geq 0.6$ & $X_4 \geq X_1 \vee X_2 \vee X_3 \vee 0.304$ならば終了．さもなければ$(X_5, Y_5)$を観察して終了.」

3.2 密度関数(5)の2変量正規分布

この場合には$\int_a^\infty p(z,y)dy = \phi(z)\,\bar{\Phi}\left(\frac{a-\rho z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$より

$$v_{n,i}(x) = \max\left[(\Phi(x))^{n-i}, v_{n,i}^c(x)\right], \tag{12}$$

$$(i = 1, 2, \cdots, n; -\infty \leq x \leq \infty; v_{n,n}(x) \equiv 1)$$

ここに

$$v_{n,i}^c(x) = \sum_{j=i+1}^{n}\int_x^\infty \frac{\phi(z)\,\bar{\Phi}\left(\frac{a-\rho z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{(\Phi(x))^{-j+i+1}}v_{n,j}(z)dz$$

であり，OLA停止領域B

$$\left\{(x|j)\left|1 \geq \sum_{m=1}^{j}\int_x^\infty \frac{\bar{\Phi}\left(\frac{a-\rho z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\phi(z)(\Phi(z))^{m-1}}{(\Phi(x))^m}dz\right.\right\}$$

が最適となり，任意の$|\rho| \leq 1$に対して，$a \downarrow -\infty$ならば，

$$B = \left\{(x|j)\left|1 \geq \sum_{m=1}^{j} m^{-1}\left[(\Phi(x))^{-m} - 1\right]\right.\right\}, \tag{13}$$

このことは$X \sim \mathbf{N}(0,1)$ならば$\Phi(X) \sim \mathbf{U}_{[0,1]}$となることより明らかである．

定理4.　2変量正規分布(5)に対する最適方程式(12)に対する最適停止規則は，$Y_i \geq a$かつ$X_i = \max_{1\leq t\leq i} X_t > f_{n-i}$を満たす最初の$(X_i, Y_i)$で停止することである．ここに$f_j$は次の方程式の$(-\infty, \infty)$における唯一の根である．

$$\sum_{m=1}^{j}\int_x^\infty \bar{\Phi}\left(\frac{a-\rho z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\frac{\phi(z)(\Phi(z))^{m-1}}{(\Phi(x))^m}dz = 1. \tag{14}$$

$\rho = 0$のとき，

$$\sum_{m=1}^{j} m^{-1}\left[(\Phi(x))^{-m} - 1\right] = \left(\bar{\Phi}(a)\right)^{-1}. \tag{15}$$

例2. $n = 5$, $\rho = 0$, $a = 0.84$のときの最適停止規則は，例1において0.6, 0.728, 0.651, 0.531, 0.304をそれぞれ0.84, 0.206, −0.014, −0.345, −0.966で置き換えることにより得られる．

参考文献

[1] M. H. DeGroot, *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York (1970).

[2] S. M. Ross, *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden Day, San Francisco, CA (1970).

[3] M. Sakaguchi, Effect of correlation in a simple deception game, *Math. Japonica*, **35** (1990) 527-536.

[4] M. Sakaguchi and K. Szajowski, Mixed-type secretary problems on sequences of bivariate random variables, *to appear*.