1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

# Deegan-Packel 指数の特性

東京大学　＊小川 隆介　OGAWA Ryuusuke
01605000　東京大学　松井 知己　MATSUI Tomomi

## 1　はじめに

議会における議案の可決, 否決に対する各政党の影響力はどの様に評価されるべきか. この影響力を数量化する試みが行なわれ, 幾つかの評価指数が提案されている. この指数を投票力指数 (power index) と呼ぶ. 代表的な投票力指数としては, Shapley-Shubik 指数 (以下 S-S 指数) と Banzhaf 指数 (以下 Bz 指数) が挙げられる. 現在までにこれらの特性や算法について, 種々の研究が行なわれている. 適用例は, 政党の影響力の分析に留まらず, 投票システムの公平性の評価や提携形成の分析などに及ぶ. 本研究では, J.Deegan and E.W.Packel[1978] によって提案された Deegan-Packel 指数 (以下 D-P 指数)[1] の特性について考察した. D-P 指数は前出の２つの指数に比して, 研究例は少ない. 本稿では特に, 多数の政党 (投票者) が存在する場合について述べる.

## 2　重み付き多数決ゲーム

議会において, 各政党はその議席数に等しい数の票を所有し, 決定は票の多数決によって行なわれる. これは重み付き多数決ゲーム (weighted majority game) によって記述される. $n$ 人重み付き多数決ゲームは, 以下の様に表される.

$$\Gamma = [q; w_1, w_2, \ldots, w_n],$$

$$N = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

$N$ は投票者の集合, $q$ は議案を通すために必要な票数 (quota), $w_i$ は投票者 $i$ の重み (weight) である. $q, w_i > 0$ とする. 議案を通す事ができる提携を勝利提携 (winning coalition) と呼ぶ. 勝利提携の全体は,

$$\mathcal{W}(\Gamma) = \{S \subseteq N | \sum_{i \in S} w_i \geq q\},$$

である. 勝利提携を真に含まない勝利提携を極小勝利提携 (minimal winning coalition) と呼ぶ. 極小勝利提携の全体は,

$$\mathcal{M}(\Gamma) = \{S \subseteq N | q \leq \sum_{i \in S} w_i < q + \min_{i \in S} w_i\},$$

である. 以下では, 注目しているゲームを明記する必要がない場合は $\Gamma$ を省略する.

## 3　Deegan-Packel 指数

投票者 $i$ の D-P 指数は, 以下の様に定義される.

$$\gamma_i = \begin{cases} \dfrac{1}{|\mathcal{M}|} \displaystyle\sum_{i \in S \in \mathcal{M}} \dfrac{1}{|S|}, & \text{if } \{S | i \in S \in \mathcal{M}\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{if } \{S | i \in S \in \mathcal{M}\} = \emptyset. \end{cases}$$

以下の性質は, S-S 指数と共通である. (1, 2 は Bz 指数と共通である. )

1. $\{S | i \in S \in \mathcal{M}\} = \emptyset \Leftrightarrow \gamma_i = 0$.
2. $(\forall S \subseteq N \setminus \{i, j\},\ S \cup \{i\} \in \mathcal{W} \Leftrightarrow S \cup \{j\} \in \mathcal{W})$ であるならば $\gamma_i = \gamma_j$.
3. $\sum_{i \in N} \gamma_i = 1$.

S-S 指数及び Bz 指数と異なる性質として, 投票者 $i, j$ について $w_i \geq w_j$ であっても $\gamma_i \geq \gamma_j$ が成り立つとは限らない事が挙げられる.

投票者の重みが整数値であるときのD-P指数の計算には, 動的計画法による算法が提案されている [2]. $n$ 人の投票者全員のD-P指数の計算には $O(qn^3)$ 時間を要する.

## 4 Deegan-Packel指数の極限

大きな重みを持つ投票者(major player)と, それに比して小さな重みを持つ投票者(minor player)が多数存在する場合について考察するために, 重み付き多数決ゲームの列 $\{\Gamma^\nu|\nu = 1,2,\ldots\}$ を定義する. 各ゲームを以下とする.

$$\Gamma^\nu = [q; w_1, \ldots, w_l, \alpha^\nu_{l+1}, \ldots, \alpha^\nu_{l+m^\nu}],$$

$$N^\nu = \{1, \ldots, l, l+1, \ldots, l+m^\nu\}.$$

各ゲームにおいて, $L = \{1, \ldots, l\}$ はmajor playerの集合, $M^\nu = \{l+1, \ldots, l+m^\nu\}$ はminor playerの集合である. また,

$$\sum_{j \in M^\nu} \alpha^\nu_j = \alpha > 0, \text{ for each } \nu$$

が成り立つとする. ここで $q$, $\alpha$, $l$, $w_i (i \in L)$ を固定し, $\nu \to \infty$ において $\max_{j \in M^\nu} \alpha^\nu_j \to 0$ を仮定する. このとき $m^\nu \to \infty$ となる.

$\{\Gamma^\nu\}$ に対して, $l+1$ 人からなる重み付き多数決ゲーム,

$$\Gamma' = [q; w_1, \ldots, w_l, \alpha],$$

$$N' = \{1, \ldots, l, l+1\},$$

を定義する. $\Gamma'$ における, $l+1$ を含まない極小勝利提携の全体を $\mathcal{M}'_L$ とおく.

極小勝利提携数 $|\mathcal{M}(\Gamma^\nu)|$ について, 次の定理が成り立つ.

<u>定理1.</u> $\Gamma^\nu$ の極小勝利提携数 $|\mathcal{M}(\Gamma^\nu)|$ は, $q - \alpha < \sum_{i \in S} w_i < q$ を満たす $S \subseteq L (S = \emptyset$ でもよい) が存在するならば,

$$|\mathcal{M}(\Gamma^\nu)| \to \infty, \text{ as } \nu \to \infty$$

である. 存在しないならば,

$$|\mathcal{M}(\Gamma^\nu)| = |\mathcal{M}(\Gamma')|, \text{ for each } \nu$$

である. □

$q - \alpha < \sum_{i \in S} w_i < q$ を満たす $S \subseteq L$ が存在しないならば, $\Gamma^\nu$ の極小勝利提携は, $\nu$ に関わらず, minor plyerを含まないか, あるいは $m^\nu$ 人全員を含むかのどちらかである. D-P指数 $\gamma(\Gamma^\nu)$ について, 次の定理が成り立つ.

<u>定理2.</u> $\Gamma^\nu$ におけるmajor player $i$ のD-P指数 $\gamma_i(\Gamma^\nu)$ は, $q - \alpha < \sum_{i \in S} w_i < q$ を満たす $S \subseteq L (S = \emptyset$ でもよい) が存在するならば,

$$\gamma_i(\Gamma^\nu) \to 0, \text{ as } \nu \to \infty$$

である. 存在しないならば,

$$\gamma_i(\Gamma^\nu) \to$$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{|\mathcal{M}(\Gamma')|} \displaystyle\sum_{i \in S' \in \mathcal{M}'_L} \dfrac{1}{|S'|}, & \text{if } \{S'|i \in S' \in \mathcal{M}'_L\} \neq \emptyset, \\ 0, & \text{if } \{S'|i \in S' \in \mathcal{M}'_L\} = \emptyset, \end{cases}$$
$$\text{as } \nu \to \infty$$

である. □

## 5 おわりに

S-S指数やBz指数についても, 同様の考察が行なわれている [3]. 結果は互いに著しく異なる. また本研究の結果は, 多数のminor playerが存在しても, $l+1$ 人からなるゲーム $\Gamma'$ を調べる事により, (D-P指数が表す) 影響力の大勢が判明する事を示唆している.

### 参考文献


[1]J.Deegan and E.W.Packel, A New Index of Power for Simple n-Person Games, International Journal of Game Theory, 7(1978), 113–123.

[2] 松井 知己, 松井 泰子, 「重み付き多数決ゲームにおける投票力指数の計算について」, 第10回RAMPシンポジウム予稿集, 17–30, 1998.

[3]P.Dubey and S.Shapley, Mathematical Properties of the Banzhaf Power Index, Mathematics of Operations Research, 4(1979), 99–131.