1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

VARIATIONS OF ACCUMULATION GAMES

American University of Cairo　　William H. Ruckle
01105053　神戸商科大学　＊菊田健作　KIKUTA Kensaku

1．Accumulation Game.　Accumulation Gameは査察（Inspection）あるいは検証の一つの数学モデルである。２人のPlayers（HiderとSeeker）がいる。n個の箱があり、毎回（たかだか、k回），HiderとSeekerは同時に、Hiderは1個のobjectをn個の箱のうち、空である箱のいずれかに隠す。一方Seekerは1個の箱を調べる。Seekerがobjectが隠されている箱を調べたとき、確率1でそれを見つける。SeekerはHiderの選択を知ることはできない。k回の後（あるいはk回に達する前に）HiderがN個の箱にobjectを隠すことができればHiderの勝ちであり、k回終了までに、N個に達しないときはSeekerの勝ちであるとする。Seekerが調べた箱の番号をHiderがどの程度知ることができるかによって、gameはいくつかのタイプに分かれる。ここでは、Seekerがobjectを見つけたときのみ、HiderはSeekerが調べた箱の番号を知ることができるような場合（この場合，ゲームはQuietであるという）の解析結果を主として報告する。

2．Variations of Accumulation Game.　Ruckle/Kikuta[2]は次の二つのスペシャルケースを分析した：(i) N=2, k=3の場合，及び(ii) N=kの場合．その分析の結果，より一般的にQuiet Accumulation Gameを解くのは困難であるのが予想された．ここではQuiet Accumulation Gameを簡略化して得られる3つのVariation（次のVAR I, VAR II, 及びVAR III）の分析結果を報告する．

VAR I: Seekerは同じ箱を二度調べることはできない．Hiderは，Seekerに見つけられて新たに空になった箱には，objectを隠すことはできない．

VAR II: Seekerは同じ箱を二度調べることはできない．

VAR III: Hiderは，Seekerに見つけられて新たに空になった箱には，objectを隠すことはできない．

VAR IIでは，Quiet Accumulation Gameにおけるよりも，Hiderに有利になっており，一方，VAR IIIでは，Seekerに有利になっている．従って，これらのゲームを解くことができれば，得られたゲームの値はQuiet Accumulation Gameのゲームの値のそれぞれ，上界，下界になっている．さらに，得られた最適戦略によってQuiet Accumulation Gameの最適戦略に関する情報を得ることができる．以下では，k=N+1と仮定する（N=k+1を仮定しない場合についてはRuckle/Kikuta[1]参照）．すなわち，Seekerが二度objectを発見するとゲームは終了しSeekerの勝ちとなる．

3．Variation II.　第i回目(i=1,...,k)のoutcome O_iを次のように定義する．

$O_i=N$:第i回目にSeekerがobjectを見つけなかった，

$O_i=F$: 第i回目にSeekerがobjectを見つけた．

Hiderが勝つ場合はoutcomeの列が次のような場合である．

(3.1) (i) $\overbrace{NN\cdots N}^{k}$ (ii) $\overbrace{NN\cdots N}^{l}F\overbrace{NN\cdots N}^{k-l}$ ($0\le l\le k-1$)

そこで，Hider の行動戦略を次のように定義する．第 t 回目($1\le t\le k$)に，

$$p_t^*(h)=\frac{1}{n-t+1}\qquad \text{for } h\in I\setminus H_{t-1} \text{ if } O_r=N \text{ for } r=1,\ldots,t-1.$$

(3.2)
$$p_t^*(s_{t-1})=1 \text{ and } p_t^*(h)=0 \text{ for } h\neq s_{t-1} \text{ if } O_{t-1}=F.$$
$$p_t^*(h)=\frac{1}{n-t+2}\qquad \text{for } h\in I\setminus H_{t-1} \text{ if } O_r=N \text{ for } r=1,\ldots,\ell-1,$$
$$O_\ell=F \text{ and } O_r=N \text{ for } r=\ell+1,\ldots,t-1.$$

ここに，$I=\{1,\ldots,n\}$，$H_{t-1}=\{h_1,\ldots,h_{t-1}\}$．次に Seeker の戦略を

(3.3)
$$q_t^*(s)=\frac{1}{n-t+1} \text{ for } s\in I\setminus S_{t-1}.$$

と定義する．ここに，$S_{t-1}=\{h_1,\ldots,h_{t-1}\}$．

定理 3.1. (3.2)と(3.3)はそれぞれ Hider と Seeker の最適戦略である．ゲームの値は $\frac{x^{k+1}}{{}_nP_{k+1}}+\frac{1}{{}_nP_{k+1}}\sum_{\ell=0}^{k-1}x^{k-\ell}[x^{\ell+1}-(x-1)^{\ell+1}]$ である．

4．Variation III. Hider が勝つ場合は(3.1)のようになる．Hider の行動戦略を

(4.1)
$$p_t^*(h)=\frac{1}{n-t+1}\qquad \text{for } h\in I\setminus H_{t-1} \text{ if } O_r=N \text{ for } r=1,\ldots,t-1,$$

と定義する．

定理 4.1. (4.1)と(3.3)はそれぞれ Hider と Seeker の最適戦略である．ゲームの値は $\frac{x^{k+1}}{{}_nP_{k+1}}+\frac{1}{{}_nP_{k+1}}\sum_{\ell=0}^{k-1}(x-1)^{k-\ell}[x^{\ell+1}-(x-1)^{\ell+1}]$ である．

5．Variation I. Hider が勝つ場合は(2.1)のようになる．(4.1)と(3.3)はそれぞれ Hider と Seeker の最適戦略である．ゲームの値は定理 4.1 で与えられたものに一致する．これより，次のことがわかる．Hider の行動に制約が課せられている場合，Seeker の行動に制約が課せられてもゲームの値は変わらない．

6．Quiet Accumulation Game の値. Quiet Accumulation Game の値を v(n,k)と表すと，定理 3.1 と定理 4.1，および戦略空間の包含関係を考えることにより次の結果を得る．

定理 6.1.
$$\frac{x^{k+1}}{{}_nP_{k+1}}+\frac{1}{{}_nP_{k+1}}\sum_{\ell=0}^{k-1}x^{k-\ell}[x^{\ell+1}-(x-1)^{\ell+1}]\ge$$
$$v(n,k)\ge\frac{x^{k+1}}{{}_nP_{k+1}}+\frac{1}{{}_nP_{k+1}}\sum_{\ell=0}^{k-1}(x-1)^{k-\ell}[x^{\ell+1}-(x-1)^{\ell+1}].$$

参考文献

[1]Ruckle/Kikuta: Variations of Quiet Accumulation games. 1998.
[2]Ruckle/Kikuta: Quiet Accumulation Games. 1997.
[3]Ruckle: *Geometric Games and Their Applications*. 1983. Pitman.
[4]Kikuta/Ruckle: Accumulation games, Part I: Noisy Search. *JOTA* 94, 1997.