1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

包絡分析法(DEA)モデルの一般化

(申請中) 大阪大学 * 尹 禮分 YUN Yeboon
01401604 甲南大学 中山 弘隆 NAKAYAMA Hirotaka
01307844 大阪大学 谷野 哲三 TANINO Tetsuzo

1 はじめに

本研究では，DEA(Data Envelopment Anaysis) における基本的なモデル，すなわち，Charnes らによって提案された CCR モデル [2, 3], Banker らによって提案された BCC モデル [1], データ集合の Free Disposable Hull を生産可能集合と見なす FDH モデル [5] を含む GDEA モデルを線形計画問題として定式化し，その GDEA モデルにおけるパラメータの変化による最適値と様々な DEA モデルの効率性との関係を比較する．

2 DEA モデル

記号の定義

DMUj: 分析対象, $j = 1, \cdots, n$

$\boldsymbol{x}_j := (x_{1j}, \cdots, x_{mj})^T > 0$: DMUj の入力データ

$\boldsymbol{y}_j := (y_{1j}, \cdots, y_{pj})^T > 0$: DMUj の出力データ

$\boldsymbol{X}$: すべての DMU の入力データ $(m \times n)$ 行列

$\boldsymbol{Y}$: すべての DMU の出力データ $(p \times n)$ 行列

ここで，Charnes らが定式化した CCR モデルとその双対問題を紹介する．

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & \sum_{k=1}^{p} \mu_k y_{ko} && \text{(CCR)} \\
\text{subject to} \quad & \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{io} = 1, \\
& \sum_{k=1}^{p} \mu_k y_{kj} - \sum_{i=1}^{m} \nu_i x_{ij} \leqq 0, \ \ j = 1, \cdots, n, \\
& \mu_k \geqq \varepsilon, \ \ k = 1, \cdots, p, \\
& \nu_i \geqq \varepsilon, \ \ i = 1, \cdots, m, \\
& \varepsilon > 0 \text{ is a small “non-Archimedean”},
\end{aligned}
$$

この問題に対する双対問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & \theta - \varepsilon(\boldsymbol{1}^T \boldsymbol{s_x} + \boldsymbol{1}^T \boldsymbol{s_y}) \\
\text{subject to} \quad & \boldsymbol{X}\lambda - \theta \boldsymbol{x}_o + \boldsymbol{s_x} = 0, \\
& \boldsymbol{Y}\lambda - \boldsymbol{y}_o - \boldsymbol{s_y} = 0, \\
& \lambda \geqq 0, \ \ \boldsymbol{s_x} \geqq 0, \ \ \boldsymbol{s_y} \geqq 0,
\end{aligned}
$$

ただし,$\boldsymbol{1} = (1, \cdots, 1)^T, \lambda \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{s_x} \in \mathbb{R}^m, \boldsymbol{s_y} \in \mathbb{R}^p$.

上の問題で，制約式 $\boldsymbol{1}^T\lambda = 1$ を加えると BCC モデルになり，さらに，$\lambda_j \in \{0, 1\}$, $j = 1, \cdots, n$ を加えると FDH モデルになる．

定義 1. 上記モデルにおいて，次の 2 つの条件を満たすとき，DMUo は効率的であるという．そうでないとき，DMUo は非効率的であるという．

(i) 最適値 θ^* が 1 である．

(ii) 最適解でのすべてのスラック変数 $\boldsymbol{s_x^*}$ と $\boldsymbol{s_y^*}$ が 0 である．

それぞれのモデルに対する効率性を比較するため，次のような生産可能集合を考える．

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \{\, (\boldsymbol{y}_j, \boldsymbol{x}_j), \ j = 1, \cdots, n \,\}, \\
P_1 &= \{\, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{Y}\lambda \geqq \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{X}\lambda \leqq \boldsymbol{x}, \ \lambda \geqq 0 \,\}, \\
P_2 &= \{\, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{Y}\lambda \geqq \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{X}\lambda \leqq \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{1}^T\lambda = 1, \ \lambda \geqq 0 \,\}, \\
P_3 &= \{\, (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \mid \boldsymbol{Y}\lambda \geqq \boldsymbol{y}, \ \boldsymbol{X}\lambda \leqq \boldsymbol{x}, \ \boldsymbol{1}^T\lambda = 1, \\
&\qquad \lambda_j \in \{0, 1\}, \ j = 1, \cdots, n \,\}.
\end{aligned}
$$

集合 $P_l \, (l = 0, 1, 2, 3)$ を用いて，‘DMUo の効率性’ の定義 1 を再定義する．

定義 2. $(\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x}) \geqq (\boldsymbol{y}_o, -\boldsymbol{x}_o)$ かつ $(\boldsymbol{y}, -\boldsymbol{x}) \neq (\boldsymbol{y}_o, -\boldsymbol{x}_o)$ を満たす $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$ が $P_l \, (l = 0, 1, 2, 3)$ に存在しないとき，DMUo が $P_l \, (l = 0, 1, 2, 3)$ 上で効率的であるという．

注意. $l = 0, 1, 2, 3$ に対する P_l 上での効率性は，それぞれ従来の value free 効率性, CCR 効率性, BCC 効率性, FDH 効率性に対応している．

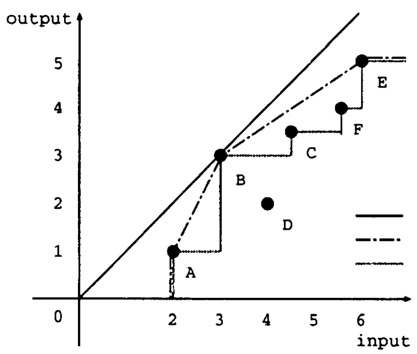

図 1. DEA models

3 一般化 DEA モデルの定式化

[6] で，提案したモデルを，実際の問題に適用するために，次のような線形計画問題を考える．

$$
\begin{aligned}
&\underset{(\Delta,\mu_k,\nu_i)}{\text{maximize}}\ \Delta \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(GDEA)}\\
&\text{subject to } \Delta \leqq \tilde{d}_j + \alpha\left(\sum_{k=1}^{p}\mu_k(y_{ko}-y_{kj})\right.\\
&\qquad\qquad \left.\sum_{i=1}^{m}\nu_i(-x_{io}+x_{ij})\right),\ j=1,\cdots,n,\\
&\qquad \sum_{k=1}^{p}\mu_k+\sum_{i=1}^{m}\nu_i=1,\\
&\qquad \mu_k,\ \nu_i \geqq \varepsilon,\ k=1,\cdots,p;\ i=1,\cdots,m.\\
&\qquad \alpha:\text{constant},\ 0<\alpha<\infty,\\
&\qquad \varepsilon>0 \text{ is a small “non-Archimedean”},
\end{aligned}
$$

ただし，$\tilde{d}_j = \max\limits_{\substack{k=1,\cdots,p\\ i=1,\cdots,m}} \{\mu_k(y_{ko}-y_{kj}),\ \nu_i(-x_{io}+x_{ij})\}$.

様々な DEA モデルと α の値による GDEA の最適値との関係を調べる．

定理 1. *DMUo が P_0 上で効率的であるための必要十分条件は，十分小さい正数 α に対する GDEA の最適値が 0 であることである．*

定理 2. *DMUo が P_2 上で効率的であるための必要十分条件は，十分大きい正数 α に対する GDEA の最適値が 0 であることである．*

定理 3. *GDEA において，$\sum_{k=1}^{p}\mu_k y_{ko} = \sum_{i=1}^{m}\nu_i x_{io}$ なる制約を付加するとき，DMUo が P_1 上で効率的であるための必要十分条件は，十分大きい正数 α に対する制約の付加された GDEA の最適値が 0 であることである．*

定理 4. *DMUo が P_3 上で効率的であるための必要十分条件は，十分小さい正数 α に対する GDEA の最適値が 0 であることである．*

定理 1 と定理 4 より，DMUo が P_0 上で効率的であることと P_3 上で効率的であることが，等しいことがわかる．

4 数値例

α の値による GDEA の最適値と様々な DEA モデルとの関係を示すため，簡単な数値例をあげて考えよう．表 1 のように，1 入力 - 1 出力の DMU が，6 個がある．計算の結果は表 2 で表す．

表 1: 1 - 入力，1 - 出力の例

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
入力	2	3	4.5	4	6	5.5
出力	1	3	3.5	2	5	4

表 2 と図 1 を見るとわかるが，GDEA モデルでで，α の値が小さくなると FDH 効率性が得られ，α の値が大きくなれば BCC 効率性が得られる．さらに，制約式 $(\boldsymbol{x}_o^T\nu = \boldsymbol{y}_o^T\mu)$ を加えると CCR 効率性と等しくなることがわかる．

表 2. DEA モデルにおいて，最適値

DMU	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
CCR モデル	0.50	**1.00**	0.78	0.50	0.83	0.73
BCC モデル	**1.00**	**1.00**	0.83	0.63	**1.00**	0.75
FDH モデル	**1.00**	**1.00**	**1.00**	0.75	**1.00**	**1.00**
(i) $\alpha=10$ $(\boldsymbol{x}_o^T\nu=\boldsymbol{y}_o^T\mu)$	-12.00	**0.00**	-3.47	-12.67	-1.64	-4.16
(ii) $\alpha=10$	**0.00**	**0.00**	-2.85	-11.00	**0.00**	-3.68
(iii) $\alpha=1$	**0.00**	**0.00**	**0.00**	-2.00	**0.00**	-0.08
(iv) $\alpha=0.1$	**0.00**	**0.00**	**0.00**	-1.10	**0.00**	**0.00**

5 結論

本研究では，基本的な DEA モデルを含む，より一般化した GDEA モデルを定式化し，その性質について考察した．CCR モデルを拡張した CCWH モデル [4] との関係を調べることが，今後の課題である．

参考文献

[1] Banker, M., Charnes, A., Cooper, W.W.(1984): *Some Models for Estimating Technical and Scale Inefficiencies in Data Envelopment Analysis.* Management Science 30, 1078-1092.

[2] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.(1978): *Measuring the Efficiency of Decision Making Units.* European Journal of Operational Research 2, 429-444.

[3] Charnes, A., Cooper, W.W., Rhodes, E.(1979): *Measuring Efficiency of Decision Making Units.* European Journal of Operational Research 3, 339.

[4] Charnes, A., Cooper, W.W., Wei, Q.L., Huang, Z.M.(1989): *Cone Ratio data Envelopment analysis and Multi-objective Programming.* International of Systems Science 22, 1099-1118.

[5] Tulkens, H.(1993): *On FDH efficiency: Some Methodological Issues and Applications to Retail Banking, Courts, and Urban Transit.* Journal of Productivity Analysis 4,183-210.

[6] Yun, Y.B., Nakayama, H., Tanino, T.(1998): *On efficiency of Data Envelopment Analysis.* Presented at the 14th International Conference on Multiple Criteria Decision Making, Charlottesville, Virginia, USA.