1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

区間効率値によるDEAモデル

大阪府立大学 *円谷 友英 ENTANI Tomoe
大阪府立大学 前田 豊 MAEDA Yutaka
01302954 大阪府立大学 田中 英夫 TANAKA Hideo

Abstract: In this paper, we formulate the DEA model with interval efficiency. There exist two phases of efficiency evaluation with respect to the upper limit and the lower limit. From these viewpoints, we can define two extreme points of efficiency. As a result, an interval efficiency for each DMU can be obtained. And we formulate the IDEA model with interval inefficiency.

1 はじめに

包絡分析法 (DEA:Data Envelopment Analysis) は，多入力多出力システムにおける効率性の評価手法であり，各事業体に対してウェイト変数による仮想出力の仮想入力に対する比の相対的な最大値として効率値を定式化している．従来のDEAでは効率的であると判断される事業体の中には優秀というよりもむしろ特異的であるものが存在する．本研究では，DEA効率値の本質的な部分を分析し，目的関数と制約条件をともにDEAと同じ形式にし，最小化問題を定式化することにより，効率値の下界値を求め，効率値を区間値として解析する手法を提案する．有利な立場からの評価であるDEAに対して，不利な立場からの評価としてIDEA (Inverted DEA) が提案されているが，IDEAによる非効率値についてもDEAと同様の考え方に基いて，区間値として与える手法を提案する．

2 DEAとIDEAの基本モデル

DEAは入力に対する出力の比を効率値として，分析対象である事業体(DMU:Decision Making Unit)にもっとも有利な立場からウェイト付けし，その効率性を他のすべてのDMUの入出力データから相対的に評価する手法である．多入力多出力を取り扱うため，ウェイト付けされた入力の和を仮想入力 ($\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}$)，ウェイト付けされた出力の和を仮想出力 ($\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}$) とみなし，ウェイトベクトルを変数とし，分析対象であるDMU_oの仮想出力の仮想入力に対する比 $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o)$ を全てのDMUについての比 $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x})$ が1以下となるという制約のもとで最大化する．DMUの数をnとし，m次元入力データ$\boldsymbol{x} \in \Re^{m\times n}$と$k$次元出力データ$\boldsymbol{y} \in \Re^{k\times n}$とすると，DEAの基本モデルであるCCRモデルは，次のように定式化される．

$$\left.\begin{array}{lll}\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^E & = \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} \\ \text{sub. to} & \frac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j} & \le 1 \quad (j=1,\ldots,n) \\ & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} & \ge 0\end{array}\right\} \tag{1}$$

(1)は容易にLP問題に変形できる．

DEAがDMU_oに対して最も有利にウェイト付け評価を行うのと対照的に，IDEAは最も不利にウェイト付け評価を行うように定式化された計画問題である．DEAが仮想出力の仮想入力に対する比 $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o)$ を最大化するのに対して，IDEAは仮想入力の仮想出力に対する比 $(\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o/\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o)$ を最大化するように目的関数を設定し，次のように定式化されている．

$$\left.\begin{array}{lll}\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{IE} & = \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o} \\ \text{sub. to} & \frac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j} & \le 1 \quad (j=1,\ldots,n) \\ & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} & \ge 0\end{array}\right\} \tag{2}$$

(2)も容易にLP問題に変形できる．

3 区間効率値の定式化

CCRモデルでは，与えられたデータを基にして効率値を求めることは，入出力ウェイトを変数として $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o)$ の値を最大化することであった．これに対し最も不利な観点からその最小値を直接求めると，出力ウェイトベクトル$\boldsymbol{u}$が0ベクトルで入力ウェイトベクトル$\boldsymbol{v}$が0ベクトル以外の任意であるときに $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o)$ の値が0となってしまう．そこで，全てのDMUに対する $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x})$ の最大値を基準にして，DMU_oの $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o)$ を測り，DMU_oにとって最も有利な評価という観点からその比を最大化するという立場に立つ．これが，CCRモデルの本来の効率値の意味であると考

えることができる．ここで，本来の効率値の意味より，CCRモデル(1)を以下のように考えることができる．

$$
\left.\begin{array}{lll}
\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{E*} & = \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\
\text{sub. to} & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \tag{3}
$$

目的関数の分母を1として，書き換えられる問題の制約式による解空間は，(1)の制約式による解空間の境界部分である．この問題の目的関数の分母，つまり全てのDMUに対する $(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x})$ の最大値を1として，それを制約式に加えてできる問題の解は，CCRモデルの解と一致する．よって，この値を区間効率値の上界とすると，その値はCCRモデルを解くことによって得られることになる．

効率値の下界は，(3)とは逆に効率値の最小化を考えることで以下のように定式化される．

$$
\left.\begin{array}{lll}
\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_{o\,*}^{E} & = \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}} \\
\text{sub. to} & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \tag{4}
$$

目的関数の分母を1とし，制約式に加えて式変形を行うと，この問題はLP問題に変形することができないので，次の2段階のステップを踏む．第一に，あるDMUについて，$(\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j/\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j)$ が1となるという制約の問題を作る．

$$
\left.\begin{array}{lll}
\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_j^{E} & = \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o} \\
\text{subject to} & \dfrac{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j} & = 1 \\
 & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \quad (j=1,\ldots,n) \tag{5}
$$

これは，LP問題に変形することができるので，すべてDMUについて，同様の問題を作るとn個のLP問題ができ，n個の値が求まる．次にそれらの最小値を求めると，その値が区間効率値の下界となる．

$$
\theta_{o\,*}^{E} \;=\; 1 \wedge \min_j \;\theta_j^{E} \tag{6}
$$

以上より，DMU_oについての効率値の上界と下界を求めることができる．効率値は，$\theta_{o\,*}^{E}$ から θ_o^{E*} の間の値をとり，区間効率値 $[\theta_{o\,*}^{E}, \theta_o^{E*}]$ として表わされる．

4 区間非効率値の定式化

ここでは，非効率値を区間値で求めるため，非効率値を全てのDMUに対する $(\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}/\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y})$ の最大値を基準にして，DMU_oの $(\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o/\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o)$ の比として与える．まず非効率値の上界をDMU_oにとって最も不利な評価という観点からその比を最大化することにより定式化する．

$$
\left.\begin{array}{lll}
\max\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_o^{IE*} & = \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\
\text{sub. to} & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \tag{7}
$$

目的関数の分母を1とし，制約式に加えて式変形を行い，効率値と同様の手順により，その最適解はすでに提案されているIDEAモデルの解と一致する．

非効率値の下界は効率値の下界を求める問題と同様にして，その比の最小化により定式化される．

$$
\left.\begin{array}{lll}
\min\limits_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}} & \theta_{o\,*}^{IE} & = \dfrac{\dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_o}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_o}}{\max\limits_j \dfrac{\boldsymbol{v}^t\boldsymbol{x}_j}{\boldsymbol{u}^t\boldsymbol{y}_j}} \\
\text{sub. to} & \boldsymbol{u},\boldsymbol{v} & \geq \boldsymbol{0}
\end{array}\right\} \tag{8}
$$

目的関数の分母を1とし，制約式に加えて式変形を行い，制約式を分解するという手順により非効率値の下界は得られる．これは効率値の下界を求めるのと同様の手順である．以上より，DMU_oについての非効率値の上界と下界を求めることができる．非効率値は，$\theta_{o\,*}^{IE}$ から θ_o^{IE*} の間の値をとり，区間非効率値 $[\theta_{o\,*}^{IE}, \theta_o^{IE*}]$ として表わされる．

5 おわりに

本論文では，従来のDEAでの最も有利な立場からの入出力関係のあるデータの効率値評価に対して，最も有利な立場以外からの評価を考慮して，データを区間効率値を用いて評価する手法を提案した．DMU_oの区間効率値は入出力ベクトルをウェイト変数として評価関数となる線形関数を与えて，最大どれほどの効率値をとり得て，最低どれほどの効率値が保証されているのかを表わしている．次に，最も不利な立場からの評価であるIDEAにも同様に区間的観点加えて，区間非効率値を求めた．これらを用いることで，DEA（IDEA）による効率値(非効率値）が1となるDMUをそれらの下界を比較することで評価することができるようになり，特に下界の小さいDMUは特異的なDMUであると判断することができる．つまり，効率値(非効率値）を区間として表わすことにより，意思決定者により多くの情報を与えることができる．