1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

DEA を用いた生産関数の推定 ～リストラクチャリングへの適用～

02202760 東京理科大学 *佐藤 俊索 SATO Shunsaku
02401460 東京理科大学 生田目 崇 NAMATAME Takashi
01701440 東京理科大学 山口 俊和 YAMAGUCHI Toshikazu

1. はじめに

現在，日本の産業は，製品の成熟化・消費者ニーズの多様化・グローバル化などによって著しく変化している．加えて，バブル経済が崩壊し深刻な平成不況に陥っている．企業はこれらの状況に対応する必要があり，リストラクチャリング（リストラ）は有効な手段となる．リストラの計画にあたっては，まず最初に，リストラによる経営資源の削減または（M & A等による）追加投入資源調達費用に見合った効果が期待できるかどうかを検討しなければならない．

本研究では，DEAの考え方に基づいて，リストラによって期待される企業の便益を推定することを目的とする．これは，当該産業の投入経営資源（入力）と便益（出力）の関係を明らかにし（生産関数の推定），その関係をリストラ後の経営資源に当てはめることにより推定できると思われる．

2. 生産関数の推定

誤差項を考慮した確率的生産フロンティア（stochastic production frontiers）は，一般に

$$\mathbb{Y} = \mathbb{X}\beta + \varepsilon, \quad \varepsilon = r - \mu \tag{1}$$

で表される[2]．ここで，$\mathbb{Y}$は出力ベクトル，$\mathbb{X}$は入力行列を表す．さらに，ε は誤差項を示し，測定誤差 (r) と技術的非効率性 (μ) で構成される．よって，生産関数を推定するには，技術的非効率性の排除が必要である．ここで，DEAはboundary methodであるため，DEAを用いることにより，技術的非効率性を排除することができる．また，(1)式をみればわかるように，一般的には多入力多出力を考えた生産関数は求めることが難しいが，多入力多出力システムを取り扱うことができるDEAを用いることにより，多入力多出力の生産関数を求めることが可能になる．さらに，より現実に近い生産関数を推定するため，効率的フロンティアを曲面で表現する対数型DEAモデル[1]を応用する．

3. 提案するモデル

提案するモデルは，規模の収穫のタイプ（一定，逓減，逓増）が（当該産業の経済状況等で）既知である場合を想定する．本研究では規模の収穫逓減を対象として，以下のように定式化する．

【対数型DRS′: Primal】

$$\min \quad \check{\gamma}_a + \check{\alpha}_a - \check{\beta}_a \tag{2}$$

$$\text{s.t.} \quad \check{\gamma}_a + \check{X}_{ia} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{aj}\check{X}_{ij} - \check{\alpha}_a + \check{s}_{ia}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{3}$$

$$\check{Y}_{ra} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{aj}\check{Y}_{rj} - \check{\beta}_a - \check{s}_{ra}, \quad r = 1, \ldots, k \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{aj} = 1 \tag{5}$$

$$\check{\alpha}_a \geq \check{\beta}_a \tag{6}$$

$$\check{\alpha}_a, \check{\beta}_a, \lambda_{aj}, \check{s}_{ia}, \check{s}_{ra} \geq 0 \tag{7}$$

ただし，ˇのついた変数は対数変換されていることを表し，γ は入力を一律に最小化する変数，α，β は規模の効率性を考慮する変数を表す．このモデルでは，対数座標軸上で線形である効率的フロンティアが，実座標軸上では指数関数で表され曲面になる，ということを利用している．さらに，(6)式の制約で規模の収穫逓減を表現している．このモデルでは単位の影響を排除する必要があり，各入出力項目は基準化した値を用いる．基準化の方法については，発表時に数値例を用いて説明する予定である．

さらに，【対数型DRS′: Primal】の双対問題を指数変換すると以下のような【DRS′: Dual】になる．

【DRS′: Dual】

$$\max \quad \frac{\eta_a \prod_{r=1}^{k} Y_{ra}^{u_{ra}}}{\prod_{i=1}^{m} X_{ia}^{v_{ia}}} \tag{8}$$

$$\text{s.t.} \quad \frac{\eta_a \prod_{r=1}^{k} Y_{rj}^{u_{ra}}}{\prod_{i=1}^{m} X_{ij}^{v_{ia}}} \leq 1, \quad j = 1, \ldots, n \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{m} v_{ia} = 1 \tag{10}$$

$$\sum_{r=1}^{k} u_{ra} \geq 1 \tag{11}$$

$$v_{ia}, u_{ra} \geq 0 \tag{12}$$

（対数型）DRS′モデルで効率的なDMUは，

$$\prod_{r=1}^{k} Y_{ra}^{u_{ra}} = \frac{1}{\eta_a}\prod_{i=1}^{m} X_{ia}^{v_{ia}} \tag{13}$$

という関係が成り立つ．ただし，$\sum_{i=1}^{m} v_{ia}=1$，$\sum_{r=1}^{k} u_{ra} \geq 1$ である．ここで，(13) 式は，Cobb-Douglas生産関数

$$y = A x_1^a x_2^{1-a} \tag{14}$$

を多入力多出力に拡張したものと考えられる．さらに，$\sum v_i = 1$，$\sum u_r \geq 1$ より，規模の収穫逓減を表している．よって，(13) 式は多入力多出力かつ規模の収穫逓減型の生産関数に相当する．しかし，DEAで得られる (13) 式の生産関数は，効率的な各DMUごとに得られる．したがって，効率的DMUを用い，一つの生産関数

$$\prod_{r=1}^{k} Y_r^{u_r} = C\prod_{i=1}^{m} X_i^{v_i} \tag{15}$$

を推定する．ただし，(13) 式と同様 $\sum v_i = 1$，$\sum u_r \geq 1$ である．ここで，(15) 式を対数変換すると，以下のようになる．

$$\sum_{r=1}^{k} u_r \check{Y}_r = \check{C} + \sum_{i=1}^{m} v_i \check{X}_i \tag{16}$$

よって，生産関数 (15) 式の推定は，i)（対数型）DRS′モデルを解くことによって効率的なDMUを選択し，ii) そのDMUについて正準相関分析を適用し，(16) 式の u_r，v_i，$\check{C}$ を推定する，という手順で行う．正準相関分析は，二組の変数群 $(\check{X}_1,...,\check{X}_m)$，$(\check{Y}_1,...,\check{Y}_k)$ それぞれの合成関数 $V = \sum_{i=1}^{m} a_i \check{X}_i$ と $U = \sum_{r=1}^{k} b_r \check{Y}_r$ の相関を最大にするように，重み係数 $A = (a_1,...,a_m)$，$B = (b_1,...,b_k)$ を決定する手法である．効率的DMUに正準相関分析を適用したとき，その最大相関係数値を ρ^* とすると

$$\sum_{r=1}^{k} b_r^* \check{Y}_r = \rho^* \check{C} + \sum_{i=1}^{m} \rho^* a_i^* \check{X}_i \tag{17}$$

が成り立つ [3]．ここで，正準相関分析では U，V の期待値と分散がそれぞれ 0，1 となるように A，B を決定するので，$\sum \rho^* a_i^* = 1$，$\sum b_r^* \geq 1$ は保証されない．よって，(17) 式の両辺に定数をかけることにより基準化（$\sum \rho^* a_i^* \longrightarrow \sum v_i^* = 1$，$\sum b_r^* \longrightarrow \sum u_r^* \geq 1$）し，さらに指数変換すると，

$$\prod_{r=1}^{k} Y_r^{u_r^*} = C\prod_{i=1}^{m} X_i^{v_i^*} \tag{18}$$

となる．

ここで (18) 式は，基準化した入出力項目について成り立つ関係であり，当該産業の生産関数を表していない．よって，以下のように (18) 式を適用する．リストラ後に各入出力値が $(X_1',...,X_m';Y_1',...,Y_k')$ になるとすると，リストラ前後の各入出力値における (18) 式の比は，

$$\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{Y_r'}{Y_r}\right)^{u_r^*} = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{X_i'}{X_i}\right)^{v_i^*} \tag{19}$$

となる．ここで，X_i'/X_i，Y_r'/Y_r はリストラによる各入出力値の変化率を表すので，(19) 式にリストラによる各入力の変化率を代入することにより，リストラによる出力全体の変化率が推定可能になる．しかし，各出力の変化率は未知であるので，入力に対する各出力への影響度の推定が必要である．本研究では，個々の入力を非説明変数として，以下の回帰式を考えることで，その影響の度合を求める．

$$X_i = \sum_{r=1}^{k} f_{ir} Y_r + f_0 \tag{20}$$

f_{ir} は，第 r 出力1単位に相当する第 i 入力の量を表すので，$1/f_{ir}$ は第 i 入力に対する第 r 出力への影響度を表す．よって，$1/f_{ir} = \theta_{ir}$ とおくと各出力の変化率 Y_r'/Y_r の比は以下のようになる．

$$\frac{Y_1'}{Y_1} : \cdots : \frac{Y_r'}{Y_r} = \sum_{i=1}^{m} \theta_{i1}\left(\frac{X_i'}{X_i}\right) : \cdots : \sum_{i=1}^{m} \theta_{ir}\left(\frac{X_i'}{X_i}\right) \tag{21}$$

この比に従って，出力全体の変化率 $\prod_{r=1}^{k}\left(\frac{Y_r'}{Y_r}\right)^{u_r^*}$ を配分する．よって，入力の変化率に対する各出力の変化率の推定が可能になる．このようにして，リストラによって期待できる効果が推定できる．

4. おわりに

本研究では，当該産業の生産関数の推定方法を提案し，リストラへの適用方法を示した．しかし，効率的なDMU（企業）をもとに推定を行ったので，技術的非効率性は考慮されていない．リストラによる入力の削減を考えたとき，非効率的な企業の出力の減少は，効率的な企業のそれよりも少ないものであると考えられる．よって今後の展開として，技術的非効率性を考慮したリストラへの適用方法の提案が挙げられる．

参考文献

[1] Banker, R.D. and A. Maindiratta: "Piecewise Loglinear Estimation of Efficient Production Surfaces," Management Science, Vol.32, No.1, pp.126–135 (1986).

[2] Charnes,A., A. Gallegos and H. Li : " Robustly Efficient Parametric Frontiers via Multtiplicative DEA for Domestic and International Operations of the Latin American Airline Industry," European Journal of Operational Research, Vol.88, pp.525–536 (1996).

[3] Ruggiero, J.: "The Weighted Russell Measure of Technical Efficiency," European Journal of Operational Research, Vol.108, pp.438–451 (1998).