1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

一対比較行列の反復修正

01404360　日本大学　西澤一友　NISHIZAWA Kazutomo

1　はじめに

AHP (Analytic Hierarchy Process) の整合性は、通常、CIの値で判断されている。CIの値は一対比較行列の主固有値であるλ_{max}により左右される。実際には一対比較を行う際に誤差が含まれるためλ_{max}の値は代替案の数nに一致することはほとんどない。また、整合性が良くないと判断された場合には、通常、一対比較行列の一部分の要素のみの修正が行われている。

本報告では、λ_{max}の値がnに一致しない場合、一対比較行列の要素全体を修正しλ_{max}の値をnに収束させる方法を提案する。そして、ウエイトの正解を設定した一対比較行列を作成し、誤差を加え、提案した方法により修正を行った場合、ウエイトへの影響を検討する。

2　提案する一対比較行列の修正方法

提案する方法は、一対比較行列の中の任意の３つの代替案についての評価値の関係から一対比較行列全体を反復修正するものである。

$n\times n$一対比較行列を$\boldsymbol{A}=[a_{ij}], i=1\sim n,\ j=1\sim n$とし、ウエイトを$w_i, i=1\sim n$とする。整合性が良い場合、$\boldsymbol{A}$は次式のようになる。

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{bmatrix} \quad (1)$$

このように、$a_{ij}=w_i/w_j$より、任意のkについて

$$a_{ij}=(w_i/w_k)/(w_j/w_k)=a_{ik}/a_{jk}=a_{kj}/a_{ki} \quad (2)$$

という関係が得られる。しかし実際には式 (2) の右辺には一対比較の際の誤差が含まれているので、$k=1\sim n$について計算したa_{ij}の値はそれぞれ異なるはずである。そこで、次式のように幾何平均によりa_{ij}を修正して行く。

$$a_{ij}=(\prod_{k=1}^{n}(a_{kj}/a_{ki}))^{1/n} \quad (3)$$

そしてλ_{max}がnに収束するまで繰り返す。

3　適用例

$n=5$の場合の一対比較行列について適用する。あらかじめ$w_i=i, i=1\sim n$とウエイトを等間隔に決定しておく。ウエイトの総和を１に正規化すると次式となる。

$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix} .06666 & .13333 & .20000 & .26666 & .33333 \end{bmatrix} \quad (4)$$

式 (4) を使い、$a_{ij}=w_i/w_j$の関係より、$\lambda_{max}=5$、$CI=0$の一対比較行列$\boldsymbol{A}_0$を求めると次式のようになる。

$$\boldsymbol{A}_0=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.5000 & 0.3333 & 0.2500 & 0.2000 \\ 2.0000 & 1.0000 & 0.6666 & 0.5000 & 0.4000 \\ 3.0000 & 1.4999 & 1.0000 & 0.7500 & 0.6000 \\ 4.0000 & 2.0000 & 1.3333 & 1.0000 & 0.8000 \\ 5.0000 & 2.5000 & 1.6666 & 1.2500 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (5)$$

式 (5) をもとにして、乱数により誤差e_{ij}を加えた一対比較行列を作り、式(3) で提案した手法により修正してみる。例１ではCIの値が0.1に近い場合を、例２ではCIの値が大きい場合を示す。

3.1　例１

$\boldsymbol{A}_0$に$\log e_{ij} \in \mathrm{N}(0,1^2)$により誤差を加え作成した幾つかの一対比較行列のうち、CIの値が0.1に近い例として$\boldsymbol{A}_1$を次式に示す。

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.3778 & 0.8931 & 0.2694 & 0.2745 \\ 2.6463 & 1.0000 & 0.2804 & 0.7188 & 0.5922 \\ 1.1196 & 3.5650 & 1.0000 & 0.7383 & 0.5701 \\ 3.7115 & 1.3911 & 1.3543 & 1.0000 & 0.8799 \\ 3.6428 & 1.6883 & 1.7539 & 1.1364 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (6)$$

式 (6) は$\lambda_{max}=5.396$、$CI=0.099$である。提案した手法により修正した一対比較行列$\boldsymbol{A}'_1$は式 (7) のようになり、$\lambda_{max}=5$、$CI=0$が得られた。

$$\boldsymbol{A}'_1=\begin{bmatrix} 1.0000 & 0.6018 & 0.4308 & 0.3323 & 0.2895 \\ 1.6614 & 1.0000 & 0.7159 & 0.5522 & 0.4811 \\ 2.3207 & 1.3968 & 1.0000 & 0.7713 & 0.6720 \\ 3.0086 & 1.8108 & 1.2963 & 1.0000 & 0.8712 \\ 3.4533 & 2.0785 & 1.4880 & 1.1478 & 1.0000 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$\boldsymbol{A}_0$、$\boldsymbol{A}_1$、$\boldsymbol{A}'_1$のウエイトを比較してみると表1のようになった。表1の結果から、修正を行った$\boldsymbol{A}'_1$のウエイトは

表 1: 例１のウエイトの比較

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
$\boldsymbol{A}_0$	.06666	.13333	.20000	.26666	.33333
$\boldsymbol{A}_1$	.09134	.14875	.22309	.25027	.28653
$\boldsymbol{A}'_1$	.08738	.14517	.20278	.26289	.30175

正解である$\boldsymbol{A}_0$のウエイトに近づいていることがわかる。

3.2 例２

$\boldsymbol{A}_0$に$N(0,2^2)$の正規乱数により誤差を加え作成した幾つかの一対比較行列のうち、CIの値が大きい例として$\boldsymbol{A}_2$を次式に示す。

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 2.0940 & 0.0707 & 0.3996 & 0.0772 \\ 0.4775 & 1.0000 & 1.0955 & 1.0712 & 2.1457 \\ 14.1398 & 0.9128 & 1.0000 & 2.4378 & 0.1630 \\ 2.5020 & 0.9334 & 0.4102 & 1.0000 & 2.4328 \\ 12.9505 & 0.4660 & 6.1326 & 0.4110 & 1.0000 \end{bmatrix} \tag{8}$$

式 (8) は$\lambda_{max} = 8.040$、$CI = 0.760$であり、整合性は良くない。そこで、式 (8) を有向グラフで表現してみると図1のようになり表2 に示すサイクルを持っている。つまり、一対比較結果に矛盾が含まれている。サイクルを消すためには、$a_{2_{12}}$の修正が必要である。しかし、サイクル(3 4 5) を消すための指摘はできない。

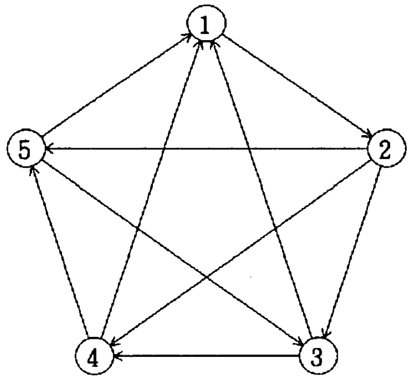

図 1: 例２の有向グラフ表現

表 2: 例２に含まれるサイクル

長さ３	長さ４	長さ５
1 2 3	1 2 3 4	1 2 3 4 5
1 2 4	1 2 4 5	1 2 4 5 3
1 2 5	1 2 5 3	1 2 5 3 4
3 4 5		

提案した手法により修正した一対比較行列$\boldsymbol{A}'_2$は次式のようになった。

$$\boldsymbol{A}'_2 = \begin{bmatrix} 1.0000 & 0.3280 & 0.2454 & 0.2874 & 0.1974 \\ 3.0480 & 1.0000 & 0.7481 & 0.8760 & 0.6019 \\ 4.0742 & 1.3366 & 1.0000 & 1.1709 & 0.8046 \\ 3.4794 & 1.1415 & 0.8540 & 1.0000 & 0.6871 \\ 5.0635 & 1.6612 & 1.2428 & 1.4552 & 1.0000 \end{bmatrix} \tag{9}$$

式 (9) では例１と同様に$\lambda_{max} = 5$、$CI = 0$が得られた。また、有向グラフで表現しても表2に示したサイクルはすべて消えていた。

$\boldsymbol{A}_0$、$\boldsymbol{A}_2$、$\boldsymbol{A}'_2$のウエイトの比較を表3に示す。$\boldsymbol{A}'_2$で

表 3: 例２のウエイトの比較

	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5
$\boldsymbol{A}_0$	.06666	.13333	.20000	.26666	.33333
$\boldsymbol{A}_2$	.06807	.17380	.22988	.18072	.34752
$\boldsymbol{A}'_2$	.06000	.18290	.24447	.20878	.30383

はサイクルが消えたので整合性は改善はされている。しかし、正解である$\boldsymbol{A}_0$のウエイトと比較してw_3とw_4の順位が逆転している。これは、整合性の良くない一対比較から修正を行ったので仕方ないかもしれない。

4 結論

意思決定者が作成した一対比較行列に修正を加えることには賛否両論があると思われる。本報告のねらいは意思決定者への最終決定の判断材料を提供することである。適用例から判断すると、整合性の良い一対比較行列はさらに正解に近くなり、整合性の良くない一対比較行列は修正前と修正後の違いから原因となる要素を指摘することができることがわかった。以上のことから、提案した手法は有効であると思われる。