2-B-8

1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ハミルトン閉路から構成されるある推移グラフの直径について

慶應義塾大学　太田 克弘　OTA Katsuhiro
02004750　慶應義塾大学　*小田 芳彰　ODA Yoshiaki

1 はじめに

完全グラフ K_n には $\frac{(n-1)!}{2}$ 個のハミルトン閉路が存在する。これらを頂点とし、ハミルトン閉路どうしが2辺の交換で互いに移りあえるとき隣接しているとして定義されるグラフの直径、連結性、ハミルトン性についていくつかの性質が成り立つ。本講演では特に直径について考える(連結性、ハミルトン性については[4]を参照)。また、これに関連する推移グラフの直径についても考察する。

2 問題の背景

与えられた n 点をすべて通るような最短巡回路をみつける問題を巡回セールスマン問題(TSP)という。TSPはNP困難であるため、近似解をみつけるアルゴリズムが研究されている。TSPの局所探索の1つに2-OPTとよばれている手法がある。

定義 1 与えられた n 点に対して、2つの巡回路 T, T' が次の条件をみたすとき、T から T' への変形を2-changeという。

1. T' の巡回路長 $<$ T の巡回路長
2. T' が T の2辺を除去し、新たに異なる2辺をつけ加えてできる

ある初期解(巡回路)から始まり、解の改善ができなくなるまで2-changeを繰り返す変形操作を2-OPTという。

2-OPTだけでは局所解におちいってしまい、一般に最適解にたどりつくことはできない。一般的にはとても有力な方法ではあるが、局所解におちいるまでの2-changeの回数は理論的には n に関する多項式ではおさえられないことが知られている。

定理 1 (Lueker ([2] 参照)) 2-OPTによって局所探索を行なうとき、局所解におちいるまでに指数回の2-changeが必要な問題例が存在する。

そこで1の条件をはずした2-changeを何回繰り返すことで任意の巡回路から任意の巡回路に変形できるかという問題を考える。この問題を考えるために次の節で定義するような推移グラフ C_n^* を考える。C_n^* の直径がこの問題の変換操作の回数に対応する。

3 定義および直径

定義 2 次の規則で構成した推移グラフを C_n^* で表す。

頂点 : K_n 上のハミルトン閉路
辺 : 2点に対応する K_n 上のハミルトン閉路が2辺の交換(2辺の除去かつ異なる2辺の挿入)で互いに移りあえるとき隣接関係を結ぶ。

ここでの2辺の交換はハミルトン閉路の部分パス(部分列)の反転ということもできる。ハミルトン閉路を順列におきかえた推移グラフも考えられる。

定義 3 次の規則で構成した推移グラフを P_n^* で表す。

頂点 : 集合 $\{1, \cdots, n\}$ の順列
辺 : 部分列の反転で互いに移りあえるとき隣接関係を結ぶ。

グラフ G の直径を $\mathrm{diam}(G)$ と表すことにする。次の命題が知られている。

定理 2 (Bafna and Pevzner[1])

$$\mathrm{diam}(P_n^*) = n - 1$$

C_n^* について次の定理が成り立つ。

定理 3

$$\mathrm{diam}(C_n^*) = \begin{cases} n-3 & (n = 4 \text{ or } n \geq 6) \\ 3 & (n = 5) \end{cases}$$

C_n^*, P_n^* の部分グラフで、隣接関係の条件を強くした次のようなグラフも考えられる。

定義 4 次の規則で構成した推移グラフを C_n^k で表す。

頂点 : K_n 上のハミルトン閉路

辺 : 長さ k の部分列の反転で互いに移りあえるとき隣接関係を結ぶ。

定義 5 次の規則で構成した推移グラフを P_n^k で表す。

頂点 : 集合 $\{1, \cdots, n\}$ の順列

辺 : 長さ k の部分列の反転で互いに移りあえるとき隣接関係を結ぶ。

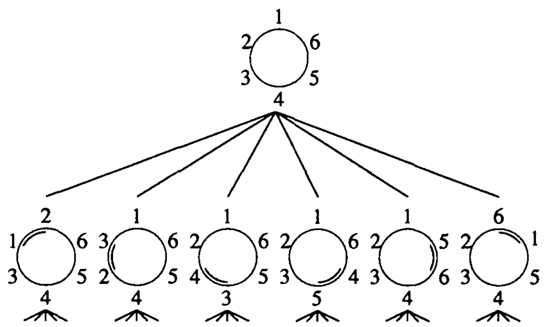

図 1: C_6^2 上のハミルトン閉路 (1,2,3,4,5,6) とその近傍

まず、次の性質が成り立つ。

定理 4 n が奇数のとき C_n^2 と C_n^3 は同型である。

明らかに C_n^k は C_n^* の、P_n^k は P_n^* の部分グラフである。P_n^2 の直径に関しては転倒数を考えることにより、次の命題が成り立つことが容易にわかる。

定理 5

$$\mathrm{diam}(P_n^2) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

C_n^2 についても同じように考えると

$$\mathrm{diam}(C_n^2) \leq \frac{(n-1)(n-2)}{4}$$

であることがわかるが、もう少し強く次のようなことが言える。

定理 6 ある絶対定数 $\epsilon > 0$ が存在して

$$\mathrm{diam}(C_n^2) \leq (\frac{1}{4} - \epsilon)n^2 + O(n)$$

さらに下限については次のようなことが成り立つ。

定理 7

$$\mathrm{diam}(C_n^2) \geq \frac{1}{8}n^2 + O(n)$$

参考文献

[1] V.Bafna, P.A.Pevzner, *Genome rearrangements and sorting by reversals*, SIAM J. Comput. 25, 1996, pp. 272-289.

[2] B.Chandra, H.Karloff, C.Tovey, *New results on the old k-opt algorithm for the TSP*, 5th Annual ACM Symposium on Discrete Mathematics, 1994, pp. 150-159.

[3] 岡田 正浩, 田地 宏一, 巡回セールスマン問題に対する λ-opt の確率的多項式性, 日本 OR 学会 1998 年度春季研究発表会アブストラクト集, 1998, 2-A-4, pp.134-135.

[4] 太田 克弘, 小田 芳彰, 善本 潔, ハミルトン閉路から構成されるある推移グラフについて, 1998 年度応用数学合同研究集会予稿集 (於 龍谷大学), 1998.