1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

# 完全２分木の深さ同一頂点間への１辺追加問題
## — 総頂点間経路長の最小化 —

01204874　流通科学大学 情報学部　＊澤田　清　SAWADA Kiyoshi
01012514　流通科学大学 情報学部　宇野　斉　UNO Hitoshi

## １．はじめに

会社などの組織の階層構造は，構成主体（個人や部，課など）を頂点に，上下の主体間関係を辺に対応させると，根付き木と考えることができる．宇野 [1] は，高さ３の完全２分木に辺を１本追加したときの，全頂点間の最短経路の長さの総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）を求め，追加位置のパターンにより分類して考察している．各頂点間の経路は組織内の主体間の関係をたどる情報伝達経路に対応しており，辺の追加は上下の主体間関係以外の追加的関係の形成に相当する．

本研究では，追加する辺を同じ深さの頂点間に限定して，高さ $H$ の完全２分木の総頂点間経路長を最小にする追加辺の深さ $N$ を求めることを考える．これは，組織内の同じ層で追加的な関係形成を行う場合に，どの層で関係を結ぶのが最も効果的であるかという問題に対応している．

## ２．総頂点間短縮経路長の定式化

ここでは，前述したように，高さ $H(H=1,2,\cdots)$ の完全２分木の，深さ $N(N=1,2,\cdots,H)$ の２頂点間に辺を１本追加する．ただし，完全２分木は，すべての葉が同じ深さをもち，すべての内部頂点の次数が２であるような２分木を指す．また，深さは，根からその頂点までの経路の長さを表す．

このとき，深さ $N$ の頂点間に追加可能な辺は，同形のグラフを除去すると $N$ 通り存在するが，ここでは，根の左部分木内の頂点と右部分木内の頂点を結ぶ辺を追加することとする（理由については後述する）．

このとき，総頂点間経路長が最小となる $N$ を求める．ここでは，高さ $H$ の完全２分木の深さ $N$ の位置に辺を追加することにより，追加前と比べて総頂点間経路長がどれだけ短縮されたかを定式化する．以後，これを総頂点間短縮経路長と呼び，$S_H(N)$ と表すこととすると，

$$
\begin{aligned}
S_H(N) \\
= & \sum_{i=1}^{N-2}[M(H-i-2)+1] \\
& \times\sum_{j=1}^{i}[M(H-N+j-1)+1](2i-2j+1) \\
& +2M(H-N)\sum_{i=1}^{N-1}[M(H-i-1)+1] \\
& \times(2i-1)+[M(H-N)]^2(2N-1) \qquad (1)
\end{aligned}
$$

と定式化される．ただし，

$$\sum_{i=1}^{-1}\cdot \;=\; 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{0}\cdot \;=\; 0 \qquad (3)$$

と定義する．また，$M(k)(k=0,1,2,\cdots)$ は高さ $k$ の完全２分木の頂点数を表す．

このとき

$$S_H(N) > S_h(n) \qquad (4)$$

であることから，次の定理１が導ける．ただし，

$$
\begin{aligned}
(h,n) \;=\; & (H-1,N-1),(H-2,N-2),\cdots, \\
& (H-N+1,1)
\end{aligned}
$$

とする．

**定理１** 完全２分木の同じ深さの頂点間に１辺を追加するとき，根の左部分木内の頂点と右部分木内の頂点を結ぶ辺が，総頂点間短縮経路長を最大にする．

(証明略.)

定理 1より，総頂点間短縮経路長を最大にする辺を求める場合，前述したように根の左部分木の頂点と右部分木の頂点を結ぶ辺だけを考えればよい.

式 (1) に

$$M(k) = 2^{k+1} - 1 \tag{5}$$

を代入して整理すると，次式が得られる.

$$\begin{aligned} S_H(N) &= 3N \cdot 2^{2H-N} - 2^{2H-N} + 2^{H-N+3} \\ &\quad -3 \cdot 2^{H+1} + 2N - 1 \end{aligned} \tag{6}$$

以下では，式 (6) の $S_H(N)$ を最大にする $N$を求める.

## 3. 最適追加辺深さ

$S_H(N)$ の $N$に関する差分をとると

$$\begin{aligned} & S_H(N+1) - S_H(N) \\ &= \frac{-3N+4}{2^{N+1}} 2^{2H} - \frac{8}{2^{N+1}} 2^H + 2 \\ & \quad (N = 1, 2, \cdots, H-1) \end{aligned} \tag{7}$$

を得る. 式 (7) の $2^H = x$ とおくと，$x$ の 2 次関数となることから，定理 2に示す解析結果が得られる.

**定理 2** 総頂点間短縮経路長 $S_H(N)$ の差分に関して，

*(I)* $N = 1$ のとき

$H = 2$ の場合　$S_H(N+1) - S_H(N) < 0$

$H \geq 3$ の場合　$S_H(N+1) - S_H(N) > 0$

*(II)* $N \geq 2$ のとき

$S_H(N+1) - S_H(N) < 0 \quad (H \geq 3)$

である.

(証明略.)

また，$S_H(3)$ と $S_H(1)$ の差分をとることにより，次の定理 3が得られる.

**定理 3**

$$S_H(3) - S_H(1) < 0 \quad (H \geq 3)$$

(証明略.)

総頂点間短縮経路長が$T$番目に大きい追加辺の深さを $N_T (T = 1, 2, \cdots, H)$ と表すことにすると，定理 2および定理 3より，各々の $H$に対する $N_T$ は，以下のようになる. ここで，$N_1$が最適追加辺深さとなる.

(i) $H = 1$ の場合

$N_1 = 1$

(ii) $H = 2$ の場合

$N_1 = 1$

$N_2 = 2$

(iii) $H \geq 3$ の場合

$N_1 = 2$

$N_2 = 1$

$N_t = t \ (t = 3, 4, \cdots, H)$

## 4. おわりに

高さが 3 以上の完全 2 分木内の，同じ深さの 2 頂点間に辺を 1 本追加する場合，根の左部分木と右部分木の深さ 2 の頂点同士を接続すれば，総頂点間経路長を最も小さくできることが示された. これは，ここで想定したような組織の場合，階層数が増大してもその最上層から 2 層下の 2 者間に関係を追加することで組織内情報伝達を最も改善できることを示している.

## 文献

[1] 宇野　斉, “組織内コミュニケーション・パスの追加効果について,” 組織科学, Vol.27, No.2, pp.73–86 (1993).

[2] 浅野孝夫, 情報の構造［上］, 日本評論社 (1994).