1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

ファジィコストをもつ最小木問題の一定式化

02102914 大阪大学 *片桐 英樹 KATAGIRI Hideki
01005194 大阪大学 石井 博昭 ISHII Hiroaki

1 はじめに

枝に重み (コスト) が与えられているグラフにおいて、属する枝の長さの総和が最小になるような極大木を求める問題を最小木問題という。この問題は、輸送問題、ネットワークの建設問題など、多くの組み合わせ最適化問題に適用できる重要な問題の一つである。枝のコストが確定値で与えられる場合の解法は Kruskal [1] や Prim [2] によって与えられている。その後、Sollin [3], Yao [4] らによって効率的なアルゴリズムが与えられた。Megiddo [5] は Sollin のアルゴリズムを応用して目的関数が線形分数関数で与えられる場合の有効な解法を示している。

枝のコストが確率変数で表される場合の意思決定法、および解法は Ishii et al.[6][7] によって導入され、その後、Geetha et al. [8] によって改良された。コストが可能性変数で表される場合のモデルは伊藤、石井 [9] によって研究されているが、まだ数は少ない。[9] ではコストの総和に対してあるファジィ目標を設け、ファジィ目標を満たす必然性測度を最大化する極大木を多項式時間で求めるアルゴリズムを示している。

本稿では、枝に付随するコストが L-ファジィ数である場合において総和コストに関する可能性測度または必然性測度を最大化するような極大木を求める問題に対し、Sollin, Megiddo らの方法を応用したより効率的な解法を示す。

2 定式化

$G=(N,E)$ を点集合 $N=\{v_1,v_2,\ldots,v_n\}$ と枝集合 $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}\subset N\times N$ からなる無向グラフとし、e_i にはコスト c_i が設定されているものとする。G における極大木 $T=T(N,S)$ は $S\subseteq E$ かつ閉路を含まない連結部分グラフである。

T は次のように $0-1$ 変数の $x_1,x_2,\ldots,x_m$ で表すことができる。

$$T:\quad \begin{array}{ll} x_i=1 & e_i\in S \\ x_i=0 & e_i\notin S \end{array}$$

ST を $T(N,S)$ に対応する $0-1$ ベクトルの集合とし、ST を極大木の集合とみなす。このとき、最小木問題は以下のように定式化される。

$$P_1:\quad \begin{array}{ll} \textit{maximize} & \mathbf{cx} \\ \textit{subject to} & \mathbf{x}\in ST \end{array}$$

ここで、c_i は次のようなメンバシップ関数 μ_{C_i} で特性づけられる L-ファジィ数とする。

$$\mu_{C_i}(c_i)=L\left(\frac{c_i-\mu_i}{\alpha_i}\right)$$

また、$L(\cdot):\mathbb{R}\to[0,1]$ は単調減少かつ連続であり、$L(0)=1$, $L(t)=L(-t)$ を満たすとする。μ_i, α_i は正の定数である。$y=\mathbf{cx}$ とすると拡張原理により、目的関数は以下のようなメンバシップ関数 $\mu_Y(y)$ で特性づけられる L-ファジィ数 Y になる。

$$\mu_Y(y)=L\left(\frac{y-\sum_{i=1}^m\mu_i x_i}{\sum_{i=1}^m\alpha_i x_i}\right)$$

次に目的関数値に対するファジィ目標 G を「だいたい f 以下である」とし、G を特性づけるメンバシップ関数を $\mu_G(\cdot)$ とする。$\mu_G(\cdot)$ は単調非増加な上半連続関数とする。さらにファジィ目標を満たす可能性測度を次のように定義する。

$$\Pi_Y(G)=\sup_y\min\{\mu_Y(y),\ \mu_G(y)\}$$

3 可能性測度最大化モデル

P_1 の意思決定法として P_2 を提案する。

$$P_2:\quad \begin{array}{ll} \textit{maximize} & h \\ \textit{subject to} & \Pi_Y(G)\geq h \\ & \mathbf{x}\in ST \end{array}$$

制約式 $\Pi_Y(G)\geq h$ を変形すると

$$\sum_{i=1}^m\mu_i x_i - L^*(h)\sum_{i=1}^m\alpha_i x_i \leq \mu_G^*(h)$$

となる。ただし、$L^*(h)$, $\mu_G^*(h)$ はそれぞれ以下のように定義される擬逆関数である。

$$L^*(h)=\begin{cases}\sup\{r|L(r)>h,\ r\geq 0\} & (0<h\leq 1)\\ \infty & (h=0)\end{cases}$$

$$\mu_G^*(h)=\begin{cases}\sup\{r|\mu_G(r)\geq h\} & (0<h\leq 1)\\ \sup\{r|\mu_G(r)>h\} & (h=0)\end{cases}$$

従って P_2 を変形すると次のように変形される。

$$P_3:\quad \begin{array}{ll} \textit{maximize} & h \\ \textit{subject to} & \sum_{i=1}^m(\mu_i-L^*(h)\alpha_i)x_i\leq\mu_G^*(h) \\ & \mathbf{x}\in ST \end{array}$$

ここで P_3 に対して次のような部分問題を考える。

$$P^h: \quad minimize \sum_{i=1}^{m}(\mu_i - L^*(h)\alpha_i)x_i$$
$$\mathbf{x} \in ST$$

固定した h $(0 \le h \le 1)$ に対しては P^h は通常の最小木問題であり、従来の方法で解くことができる。ここで、$X^h \triangleq (x_1^h, \ldots, x_m^h)$ を P^h の最適解、Z_h をその時の最適値とすると以下のような性質が成り立つ。

性質 1
Z_h は h の単調増加関数である。

また、
$$F_h \equiv Z_h - \mu_G^*(h)$$
とし、P_3 の最適解を X^*、最適値を h^* とすると、以下のような定理が成り立つ。

定理 1

1. $F_h > 0 \leftrightarrow h^* < h$
2. $F_h = 0 \leftrightarrow h^* = h$
3. $F_h < 0 \leftrightarrow h^* > h$

4 アルゴリズム

P_3 は [9] の方法によって $O(n^5 \log n)$ の計算時間で解くことができるが、さらに効率よいアルゴリズムを提案する。まず、$L^*(h) = \beta$ とおき、各々の枝 e_i に対して $c_i(\beta) \triangleq \mu_i - \beta\alpha_i$ とし、各々の v_k に対して

$$g_k(\beta) \triangleq \min\{c_i(\beta)|e_i = (v_k, v_l) \in E\}$$

とする。このとき、$g_k(\beta)$ は β の区分的線形関数である。次に (0, 1) にある全ての区分点 β_i を求め、対応する h_i を $h_i = L(\beta_i)$ より求めて

$$h_0 = 0 < h_1 < \cdots < h_s < h_{s+1} = 1$$

とソートしておく。

アルゴリズム

手順 1 $F_{h_q} < 0$ となるような最小の q を求め、$L \leftarrow h_q$, $U \leftarrow h_{q+1}$ とする。

手順 2 区間 $[L, U]$ においてすべての $v_k \in N$ に対して g_k を与えるようなすべての e_i から、スパニング・フォレスト $(T_1, T_2, \ldots, T_t)$ を形成し、手順 3 に進む。ここで T_j は部分木を表す。

手順 3 $t = 1$ ならば、最適解 X^* 次のようになる。

$$X^*: \quad \begin{array}{ll} x_i^* = 1 & e_i \in T_1 \\ x_i^* = 0 & e_i \notin T_1 \end{array}$$

また $F_{h_1} = 0$ を満たす h_1 が最適値になる。
$t \neq 1$ であれば、手順 4 へ進む。

手順 4 各々の T_i に対して
$g^i(\beta) = \min\{c_j(\beta)|e_j$ によって T_i が他の部分木と連結している $\}$ を求め、区間 $[L, U]$ において交点を求める。さらに $g^1(\beta), \ldots, g^t(\beta)$ のすべての交点から $h = L(\beta)$ によって対応する h を求め、次のようにソートし、手順 5 に進む。

$$h_0 = L < \cdots < h_r = U$$

手順 5 $F_{h_j} < 0$ となるような最小の h_j を求め $L \leftarrow h_j$, $U \leftarrow h_{j+1}$ とする。次に $h \in [L, U]$、すなわち $\beta = L^*(h)$ に対して $g^i(\beta)$ を与えるような枝を $(T_1, T_2, \ldots, T_t)$ に付け加え、手順 3 へ戻る。

定理 2
提案したアルゴリズムによって P_3 の最適解は多くとも $O(m \log^2 n \log\log n)$ の計算時間で求めることができる。

5 結言

本研究では、ネットワークにおいて枝に付随するコストが L-ファジィ数で表される場合の意思決定法と最適解を多項式時間 $O(m \log^2 n \log\log n)$ で求める効率的なアルゴリズムを提案した。ここでは可能性測度最大化問題として定式化したが、必然性測度最大化問題も同様の方法で解くことができる。

最後に、本研究は文部省科学研究費基盤研究 (c)(2) 10680428 の援助を受けていることを付記しておく。

参考文献

[1] J.B.Kruskal, "On the Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem", Proceedings of AMS **7** (1956) 48-50.

[2] R.C.Prim, "Shortest Connection Networks and Some Generalizations", *Bell System Technical Journal* **36** (1957) 1389-1401.

[3] C.Berge and A.Ghouila-Hour, *Programming, Games and Transportation Networks*, Wiley, New York (1965).

[4] A.C.Yao, "An $O(|E| \log\log |V|)$ algorithm for finding minimum spanning trees", *Information Processing Letters* **4** (1975) 21-23.

[5] N.Megiddo, "Combinatorial optimization with rational objective function", *Mathematics of Operations Research* **4** (1979) 414-424.

[6] H.Ishii, S.Shiode, T.Nishida and Y. Namasuya, "Stochastic spanning tree problem". *Discrete Applied Mathematics* **3** (1981) 263-273.

[7] H.Ishii, S.Shiode, and T.Nishida, "Chance constrained spanning tree problem". *Journal of Operations Research Society of Japan* **24** (1981) 147-157.

[8] S.Geetha and K.P.K.Nair, "On Stochastic Spanning Tree Problem". *Networks* **23** (1993) 675-679.

[9] 伊藤健、石井博昭, "必然性測度に基づくファジィ・スパニング・ツリー問題の一解法", *Journal of the Operations Research Society of Japan* **39** (1996) 247-257.

[10] D.Cheriton and R.E.Tarjan, "Finding minimum spanning trees", *SIAM Journal of Computing*, (1976) 724-742.