1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

大規模な離散最適化問題の解法アルゴリズム

01402374 関西大学 仲川 勇二 NAKAGAWA Yuji
02401834 関西大学 *並川 哲郎 NAMIKAWA Tetsuroh

1．代理制約双対問題

次の離散最適化問題を考える。

$$[\mathrm{P^o}]:\quad \text{Maximize } f^{\mathrm{o}}(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} f_i^{\mathrm{o}}(x_i)$$

$$\text{Subject to } g_j^{\mathrm{o}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} g_{ji}^{\mathrm{o}}(x_i) \le b_j^{\mathrm{o}}$$

$$x_i \in K_i^{\mathrm{o}} \quad \text{for } j=1,\ldots,m, \quad \text{for } i=1,\ldots,n,$$

ここで

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad K_i^{\mathrm{o}}=\{1,2,\ldots,k_i^{\mathrm{o}}\}$$

一般性を失うことなしに

$$f_i^{\mathrm{o}}(x_i)\ge 0 \quad \text{for } x_i=1,\ldots,k_i^0,\ i=1,\ldots,n$$

$$g_{ji}^{\mathrm{o}}(x_i)\ge 0 \quad \text{for } x_i=1,\ldots,k_i^0,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m$$

を仮定する。

一般に、規模の大きな離散最適化問題の最適解を求めるアルゴリズムは、指数関数的なオーダーの計算量を必要し計算不能となる場合が多い。

そこで制約条件を緩めた緩和問題として代理双対問題を考える。

問題$[\mathrm{P^o}]$の双対問題は

$$[\mathrm{p^s}(\mathbf{u})]:\ \text{Maximize } f^{\mathrm{o}}(\mathbf{x})$$

$$\text{subject to } \mathbf{u}\mathbf{g}^{\mathrm{o}}(\mathbf{x})\le \mathbf{u}\mathbf{b}^{\mathrm{o}},$$

$$\mathbf{x}\in\mathbf{K}^{\mathrm{o}},$$

ここで

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_m)\in R^m,$$

$$\mathbf{g}^{\mathrm{o}}(\mathbf{x})=(g_1^{\mathrm{o}}(\mathbf{x}),g_1^{\mathrm{o}}(\mathbf{x}),\ldots g_1^{\mathrm{o}}(\mathbf{x}))^t$$

$$\mathbf{b}^{\mathrm{o}}=(b_1^{\mathrm{o}},b_2^{\mathrm{o}},\ldots b_m^{\mathrm{o}})^t$$

$$\mathbf{K}^{\mathrm{o}}=\{\mathbf{x}: x_i\in K_i^{\mathrm{o}} \text{ for } i=1,2,\ldots n\}.$$

代理制約双対問題は次のように定義できる。

$$[\mathrm{p^{SD}}]:\ \min\{v^{\mathrm{OPT}}[\mathrm{p^s}(\mathbf{u})]: \mathrm{u}\in\mathrm{U}\}$$

ここで$v^{\mathrm{OPT}}[.]$は問題$[.]$の最適な目的関数値

かつ $$\mathbf{U}=\left\{\mathbf{u}\in\mathrm{R}^m:\sum_{j=1}^{m}u_j=1,\mathbf{u}\ge 0\right\}.$$

代理双対問題の最適解を$\mathbf{x}^{\mathrm{SD}}$、最適な代理乗数をと$\mathbf{u}^*$とする。最適解$\mathbf{x}^{\mathrm{SD}}$は、多くの場合、代理双対ギャップ（surrogate duality gap）の範囲に含まれる。すなわちこのギャップは、主問題の制約条件において実行不可能解となる領域のことである。

2．標的問題

主問題の最適解を求めるために、$\mathbf{u}^*$を使って$\mathbf{x}^{\mathrm{SD}}$の近辺の解を列挙する。このために、次の標的問題を考える。

$$[\mathrm{P^T}(f^{\mathrm{T}},\mathbf{u}^*\mathbf{b})]:\ \text{Enumerate all solutions } \mathbf{x}$$

$$\text{hitting a target } \quad f^{\mathrm{O}}(\mathbf{x})\ge f^{\mathrm{T}}$$

$$\text{subject to } \mathbf{u}^*\mathbf{g}^{\mathrm{o}}(\mathbf{x})\le \mathbf{u}^*\mathbf{b}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{x}\in\mathbf{K}^{\mathrm{o}},$$

標的値f^{T}は、$f^{\mathrm{O}}(\mathbf{x}^{\mathrm{Near}})\le f^{\mathrm{T}}\le f^{\mathrm{O}}(\mathbf{x}^{\mathrm{SD}})$の範囲で決める。ここで、$\mathbf{x}^{\mathrm{Near}}$は他の近似解法で求めた最適解である。この標的問題を用いて、大規模な離散最適化問題のより良い近似解を求めるための解法アルゴリズムを提案する。

3．計算機実験

Sinha and Zoltners(1979)によって与えられている以下のグループの問題等について計算機実験を行った。

Group1:

$$0 \le f_i^O(k) < f_i^O(k+1) \le 8k_i^O$$
$$(k = 1,2,\ldots,k_i^O,\ i = 1,2,\ldots,n),$$
$$0 \le g_{ji}^O(k) < g_{ji}^O(k+1) \le 8k_i^O$$
$$(k = 1,2,\ldots,k_i^O,\ i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,m),$$

$f_i^O(k)$, $g_{ji}^O(k)$ are all integer, and

$$b_j^O = \left\lfloor \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(g_{ji}^O(1) + g_{ji}^O(k_i)\right) \right\rfloor$$

Group2:

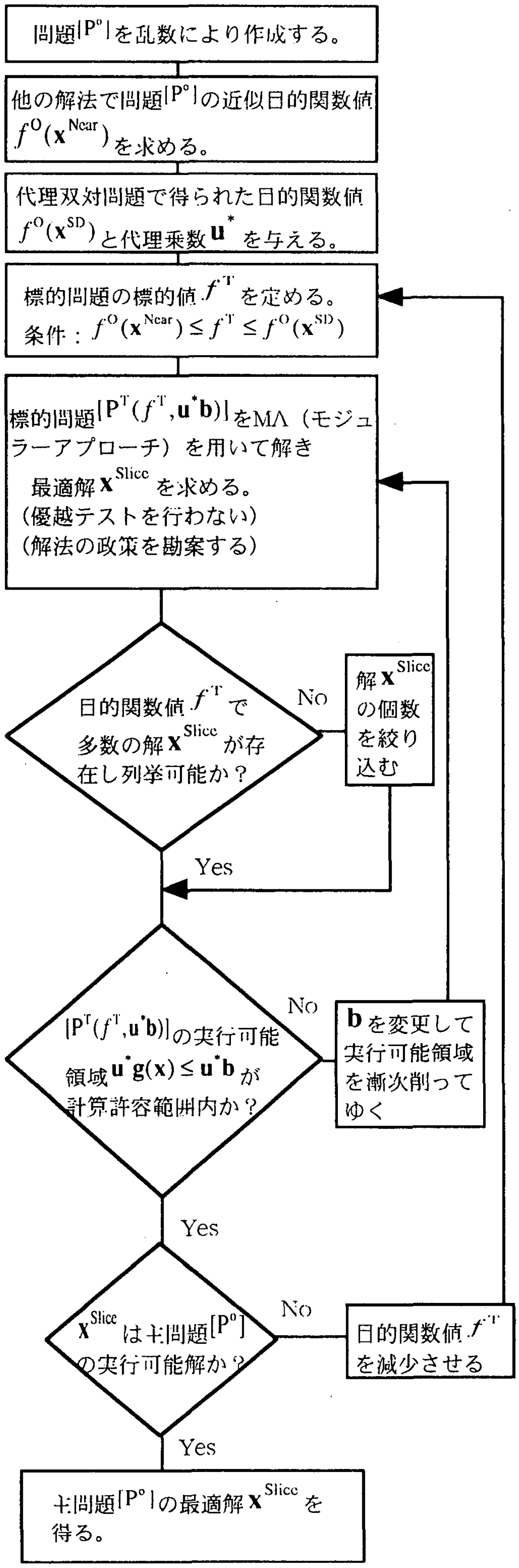
$$0 \le f_i^O(k) < f_i^O(k+1) \le 256k_i^O$$
$$(k = 1,2,\ldots,k_i^O,\ i = 1,2,\ldots,n),$$
$$0 \le g_{ji}^O(k) < g_{ji}^O(k+1) \le 256k_i^O$$
$$(k = 1,2,\ldots,k_i^O,\ i = 1,2,\ldots,n,\ j = 1,2,\ldots,m),$$

$f_i^O(k)$, $g_{ji}^O(k)$ are all integer, and

$$b_j^O = \left\lfloor \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(g_{ji}^O(1) + g_{ji}^O(k_i)\right) \right\rfloor$$

問題サイズ（$m \times n \times k_i^O$）が
2×250×20, 2×500×20, 2×1000×20,
3×250×20, 3×500×20, 3×1000×20
等の計算結果について報告する。

アルゴリズム



4．参考文献

仲川　勇二・疋田　光伯・鎌田　弘
『代理双対問題を解くためのアルゴリズム』
電子通信学会論文誌 '84/1 Vol.J67-A No.1
仲川　勇二
『離散最適化問題のための新解法』
電子通信学会論文誌 '90/3 Vol.J73-A No.3
Y.Nakagawa,
"A Reinforced Surrogate Constraints Method For Separable Nonliner Integer Programming"
Management Science（投稿中）