制約付き非線形最適化問題の解法(α制約法の提案)

01205075　広島修道大学　＊阪井　節子　SAKAI Setsuko
広島市立大学　高濱　徹行　TAKAHAMA Tetsuyuki

1　はじめに

目的関数が微分不可能である制約付き非線形最適化問題では，目的関数の微分可能性を仮定しない最適化手法である直接探索法とペナルティ法を組合せて解くことが多いが，ペナルティ関数の係数をどのような値にすれば確実に実行可能解が得られるのか，現在得られている解候補がどの程度制約を満足しているのかを把握することが困難である．

本研究では，制約の満足度をファジィ制約満足度で表現し，通常の大小関係の代わりに制約満足度を考慮した大小関係であるαレベル比較を定義し，この比較に基づき最適化を行うことにより，制約付き問題を制約のない問題に変換するα制約法を提案する．α制約法を直接探索法であるPowell法に適応することにより，本方法が制約満足度を把握でき，αレベルを1にすれば実行可能解が得られる方法であることを例により示す．

2　制約付き最適化問題

本研究では以下のような不等式制約と等式制約のある最適化問題(P)を対象とする．

$$
\begin{array}{lll}
\text{(P)} & \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\
 & \text{subject to} & g_i(\boldsymbol{x}) \le 0 \quad i = 1, \ldots, m \\
 & & h_j(\boldsymbol{x}) = 0 \quad j = 1, \ldots, l \\
 & & \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n
\end{array}
$$

但し、$f(\boldsymbol{x}), g_i(\boldsymbol{x}), h_j(\boldsymbol{x})$は$\boldsymbol{R}^n$上の実数値関数である。

制約をどの程度満足しているかを表現するために，制約満足度$\mu(\boldsymbol{x})$を導入する．制約満足度は，ファジィ数理計画法におけるファジィ制約と同等のものである．すなわち，全てのi, jについて$g_i(\boldsymbol{x}) \le 0, h_j(\boldsymbol{x}) = 0$が成り立つならば$\mu(\boldsymbol{x}) = 1$，それ以外の場合には，$0 \le \mu(\boldsymbol{x}) < 1$を満足する関数である．

このような制約満足度を定義するためには，各制約の満足度$\mu_{g_i}(\boldsymbol{x})$，$\mu_{h_j}(\boldsymbol{x})$を定義し，それらを合成する方法が考えられる．例えば，問題(P)における各制約条件は，機械的に図1のようなg_i, h_jに関する区分的線形の制約満足度関数に変換できる．

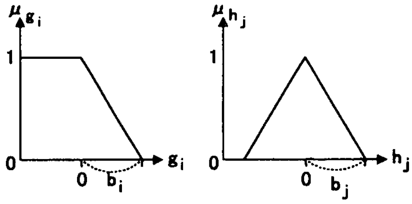

図1: 区分的線形の制約満足度関数

ただし，$b_i, b_j (> 0)$は適当な定数であり，大きくとることにより広い範囲の初期探索点に対応可能となる．

$$
\mu_{g_i}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{if } g_i(\boldsymbol{x}) \le 0 \\ 1 - \frac{g_i(\boldsymbol{x})}{b_i} & \text{if } 0 \le g_i(\boldsymbol{x}) \le b_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

$$
\mu_{h_j}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 - \frac{|h_j(\boldsymbol{x})|}{b_j} & \text{if } |h_j(\boldsymbol{x})| \le b_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

この各制約満足度から制約全体の満足度$\mu(\boldsymbol{x})$を求める結合演算としては，min演算あるいは代数積演算が適当であると考えられる．

min演算　$\mu(\boldsymbol{x}) = \min_{i,j}\{\mu_{g_i}(\boldsymbol{x}), \mu_{h_j}(\boldsymbol{x})\}$
代数積演算　$\mu(\boldsymbol{x}) = \prod_{i,j} \mu_{g_i}(\boldsymbol{x})\mu_{h_j}(\boldsymbol{x})$

3　αレベル比較とα制約法

αレベル比較　αレベル比較は，関数値fと制約満足度μの組$(f(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x}))$の集合上の大小関係である．点$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$における関数値を$f_1, f_2$，制約満足度を$\mu_1, \mu_2$とすると，このとき関数値と制約満足度の組$(f_i, \mu_i)$間の大小関係$\le_\alpha$は以下のように定義される．

$$
(f_1, \mu_1) \le_\alpha (f_2, \mu_2) \Leftrightarrow \begin{cases} f_1 \le f_2 & \text{if } \mu_1, \mu_2 \ge \alpha \\ f_1 \le f_2 & \text{if } \mu_1 = \mu_2 \\ \mu_1 > \mu_2 & \text{otherwise} \end{cases}
$$

αレベル比較は，制約満足度の大小関係を優先し，制約満足度が同じ場合は目的関数値の大小関係を考慮するという大小関係である．ただし，制約満足度の優先の度合いを緩和するために，両方の制約満足度が$\alpha (0 \le \alpha \le 1)$以上の場合は目的関数値の大小関係を優先し，それ以外

の場合は制約満足度の大小関係を優先する．なお，$\alpha = 0$ の場合は，目的関数のみの比較と等価になる．

α 制約法　α 制約法は，制約付き最適化問題を直接探索法で解く際に，通常の比較の代わりに α レベル比較を用いるものである．すなわち，α 制約法による最適化問題は以下のような制約のない最適化問題として定義できる．ただし，$\text{minimize}_{\leq_\alpha}$ は $\leq_\alpha$ の意味での最小化である．

$$(\mathrm{P}_{\leq_\alpha})\ \ \text{minimize}_{\leq_\alpha}\quad (f(\boldsymbol{x}), \mu(\boldsymbol{x}))$$

これは，以下の問題と等価である．

$$(\mathrm{P}^\alpha)\ \begin{array}{ll} \text{minimize} & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} & \mu(\boldsymbol{x}) \geq \alpha \end{array}$$

問題 (P^α), $(P_{\leq_\alpha})$,(P) に関して以下の定理が成り立つ。

[定理1] 問題 (P^1) に最適解が存在するならば，問題 $(\mathrm{P}_{\leq_\alpha})$ の最適解は問題 (P^α) の最適解である．

[定理2] 問題 (P) に最適解が存在するならば，問題 $(\mathrm{P}_{\leq_1})$ の最適解は，問題 (P) の最適解である．

α の制御　定理2より，$\alpha = 1$ として問題 $(\mathrm{P}_{\leq_\alpha})$ を解くことにより，問題 (P) の最適解が得られるが，最小値の探索を数値的に行う際に，制約を満足する領域が狭いことなどが原因で局所解から移動できなくなる場合がある．このような場合に，α を 1 まで漸近的に増加させながら最適化を行うことが有効であると考えられる．このような α の制御を行っても，最適解が得られることを以下に示す．

[定理3] $\{\alpha_n\}$ を強い意味で単調増加し 1 に収束する点列とする．$f(\boldsymbol{x})$, $\mu(\boldsymbol{x})$ を連続関数とし，問題 (P^1) の最適解 $\boldsymbol{x}^*$ の存在と任意の α_n に対する問題 $(\mathrm{P}_{\leq_{\alpha_n}})$ の最適解 $\hat{\boldsymbol{x}}_n$ の存在を仮定する．このとき，点列 $\{\hat{\boldsymbol{x}}_n\}$ の任意の集積点は問題 (P^1) の最適解である．

4　数値実験

Powell 法 [1] に α 制約法の考え方を取り入れたものと，目的関数にペナルティ関数を加えた拡張目的関数を Powell 法で最小化する場合とを以下の例で比較する．

$$\begin{array}{ll} \text{例 minimize} & \min\{(x_1-2)^2+(x_2+1)^2, \\ & \quad \frac{1}{2}|x_1+2|(x_2+2)^2\} \\ \text{subject to} & (x_1-1)^3 + x_2 \leq 0 \\ & -x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0 \end{array}$$

問題 (P) に対するペナルティ法における拡張目的関数 $F(\boldsymbol{x})$ は以下のように定義する．

$$\begin{aligned} F(\boldsymbol{x}) &= f(\boldsymbol{x}) + rP(\boldsymbol{x}) \\ P(\boldsymbol{x}) &= \sum_{i=1}^{m} (max\{0, g_i(\boldsymbol{x})\})^2 + \sum_{i=1}^{l} |h_j(\boldsymbol{x})|^2 \end{aligned}$$

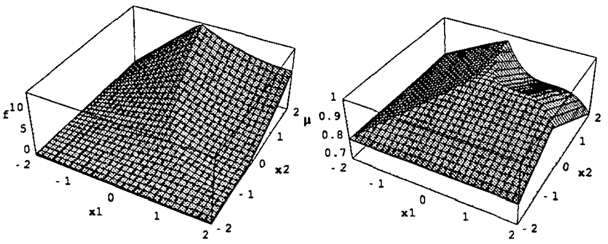

図 2: 例の目的関数と制約満足度

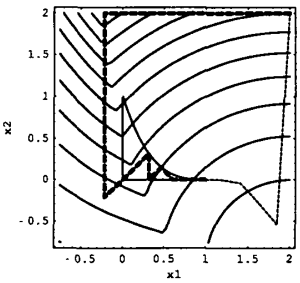

図 3: 例における探索点の変化の様子

α 制約法における制約満足度関数は図1の関数を採用し，制約満足度の結合には min 演算を用い，$b_i = 10$ とした．探索の初期点は，制約領域外である $(2, 2)$ にとり，直線探索には，囲い込みと黄金分割法を用いた．

例は，関数 min を含む，2つの関数の最小値を目的関数とする微分不可能な例であり，最適解 $\boldsymbol{x}^* = (1, 0)$ は Kuhn-Tucker 条件を満足しない．α 制約法では $\alpha = 1$ とし，実行可能解 $(0.999909, 0.000000)$ を得た．ペナルティ法では，ペナルティ係数を6通りの方法で変化させたが，いずれの場合も誤差が 10^{-3} 以内の解は探索できなかったため，最も誤差の少ない結果が得られた 50^n の場合を対象に比較する．この場合には，$r = 1, 50, 50^2, \cdots, 50^{11}$ と変化させることにより $(1.002379, 0.000000)$ の解を得たが，実行可能解とはならなかった．目的関数および制約満足度関数の形状を図2に示し，探索点の変化の様子を図3に示す．図3から分かるように，ペナルティ法では，目的関数の最小値の影響を大きく受け，制約領域外の最小値の方向へ探索を進めてしまうため，r を非常に大きく取らなければ最適解の方へ収束しない．これに対して α 制約法では制約を満足する点を発見し，制約領域内を移動して最適解に素早く収束している．

参考文献

[1] 今野浩, 山下浩: 非線形計画法, 日科技連出版社 (1978).

[2] 高濱徹行, 阪井節子: 多目的最適化手法とファジィ制御規則の学習について, 第56回情報処理学会全国大会講演論文集, No.2, pp.72-73 (5M-8) (1998.3)