1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

多重層重み付き総量制約の凹最大化問題

1504810 防衛大学校　*宝崎隆祐　　1000890 防衛大学校　飯田耕司

1．はじめに

本報告は、多次元空間における投入資源の総量が多重的に制約を受けている場合の凹利得関数最大化問題を扱っており、前回[1]報告した1次元、または2次元問題を多次元に一般化したものである。問題は、目的関数が一般的な凹関数であり、資源総量のみに関する単一の制約でなく重層的な制約をもつという意味で、一般の資源配分問題[2]で扱われる問題より一般的であるが、制約が総量の形をとるという意味では、非線形問題[3]よりも特殊化されている。この種の問題は豊富な現実問題をその適用例としてもっており、効率的な解法を提案することには意味がある。この報告では、よく知られている非線形計画法より計算時間の面で効率的な２つの厳密解法を提案する。

2．モデルの記述と定式化

資源投入による利得獲得の問題においてよく出会う次のような問題を考えよう。

(1) n次元離散空間上への資源投入を考える。$R_1=\{1,2,\cdots,l_1\},\cdots,R_k=\{1,\cdots,l_k\},\cdots,R_n=\{1,\cdots,l_n\}$とし、資源は$R_1\times R_2\times\cdots\times R_n$の任意の離散点に投入できる。便宜上、その部分離散空間を表すため、$S_k:=R_k\times R_{k+1}\times\cdots\times R_n$, $P_k:=R_1\times R_2\times\cdots\times R_k$と表記する。また、$S_k$の要素数を$L_k:=\prod_{j=k}^n l_j$で表す。

(2) 点$(i_1,\cdots,i_n)\in S_1$に投入する資源量を$\varphi(i_1,\cdots,i_n)$で表す。$\varphi(i_1,\cdots,i_n)$は非負であり、投入量の上限として$m_{i_1\cdots i_n}>0$が$+\infty$をも許し設定されている。また、資源の投入にはそれに比例するコスト$c_{i_1\cdots i_n}\varphi(i_1,\cdots,i_n)$ $(c_{i_1\cdots i_n}>0)$ を必要とする。各点への投入に上限があるばかりでなく、部分空間$(i_k,\cdots,i_n)\in S_k$における資源のコスト総量にも$\Phi_{i_k\cdots i_n}$の上限がある。また、空間全体への投入コストには総量Mの制約がある。

(3) 資源配分計画$\varphi=\{\varphi(i_1,\cdots,i_n),\ (i_1,\cdots,i_n)\in S_1\}$に対し、利得$f(\varphi)$が獲得できる。$f(\varphi)$は、$\varphi$に対し２回連続微分可能で、かつ狭義凹関数である。また、非負の有限値から成る変数ベクトルφに対して有界である。

以上の仮定の下で、利得関数$f(\varphi)$を最大化する資源配分計画φを求めることがここでの問題であり、狭義凹関数を最大化する次のような凸計画問題として表すことができる。

$$P_M\ :\quad \max_{\varphi}\ f(\varphi) \tag{1}$$

s.t.

$$0\le\varphi(i_1,\cdots,i_n)\le m_{i_1\cdots i_n},\quad (i_1,\cdots,i_n)\in S_1 \tag{2}$$

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_{k-1})\in P_{k-1}} c_{i_1\cdots i_n}\varphi(i_1,\cdots,i_n)\le\Phi_{i_k\cdots i_n},\ (i_k,\cdots,i_n)\in S_k\ ,\quad k=2,\cdots,n \tag{3}$$

$$\sum_{(i_1,\cdots,i_n)\in P_n} c_{i_1\cdots i_n}\varphi(i_1,\cdots,i_n)\le M\ . \tag{4}$$

3．最適解の必要十分条件

問題P_Mは有界な閉凸領域における狭義凹関数の最大化問題であるから、唯一の最適解があるという分かり易い性質をもつ。ラグランジュ乗数を導入し、問題に対するKuhn-Tucker条件を導出することにより、最適解の必要十分条件に関する次の定理を導くことができる。ただし、条件(2)~(4)を満たす実行可能な資源配分全体をΨで表している。

定理 1 (最適解の必要十分条件) $\varphi\in\Psi$が最適であるための必要十分条件は、すべての$(i_1,\cdots,i_n)\in S_1$に対し、次を満たす非負の実数λ, ν_{i_n}, $\nu_{i_{n-1}i_n}$, $\cdots$, $\nu_{i_2\cdots i_n}$が存在することである。

$$\varphi(i_1,\cdots,i_n)=0\ \text{ならば、}\ \frac{1}{c_{i_1\cdots i_n}}\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi(i_1,\cdots,i_n)}\le\lambda+\nu_{i_n}+\cdots+\nu_{i_2\cdots i_n} \tag{5}$$

$$0 < \varphi(i_1,\cdots,i_n) < m_{i_1\cdots i_n} \text{ ならば、} \frac{1}{c_{i_1\cdots i_n}}\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi(i_1,\cdots,i_n)} = \lambda + \nu_{i_n} + \cdots + \nu_{i_2\cdots i_n} \tag{6}$$

$$\varphi(i_1,\cdots,i_n) = m_{i_1\cdots i_n} \text{ ならば、} \frac{1}{c_{i_1\cdots i_n}}\frac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi(i_1,\cdots,i_n)} \geq \lambda + \nu_{i_n} + \cdots + \nu_{i_2\cdots i_n}\ , \tag{7}$$

$$\text{かつ、} k = 2,\cdots,n \text{ に対し、} \nu_{i_k\cdots i_n} > 0 \text{ ならば、} \sum_{i_1,\cdots,i_{k-1}} c_{i_1\cdots i_n}\varphi(i_1,\cdots,i_n) = \Phi_{i_k\cdots i_n},\ (i_k,\cdots,i_n) \in S_k\ ,$$

$$\text{さらに、} \lambda > 0 \text{ ならば、} \sum_{i_1,\cdots,i_n} c_{i_1\cdots i_n}\varphi(i_1,\cdots,i_n) = M\ .$$

$\partial f(\varphi)/\partial\varphi(i_1,\cdots,i_n)/c_{i_1\cdots i_n}$を変数$\varphi(i_1,\cdots,i_n)$の関数として$\rho_{i_1\cdots i_n}(\varphi(i_1,\cdots,i_n);\varphi_{-i_1\cdots i_n})$で表す。ただし、$\varphi_{-i_1\cdots i_n}$は$\varphi(i_1,\cdots,i_n)$以外の変数ベクトルである。$\rho_{i_1\cdots i_n}(\cdot)$は単調減少関数であり、逆関数$\rho^{-1}_{i_1\cdots i_n}(y;\varphi_{-i_1\cdots i_n})$が定義できる。これを使えば、(5)~(7)式は一括して次式で表すことができる。

$$\varphi(i_1,\cdots,i_n) = \left[\rho^{-1}_{i_1\cdots i_n}(\lambda + \nu_{i_n} + \cdots + \nu_{i_2\cdots i_n};\varphi_{-i_1\cdots i_n})\right]_0^{m_{i_1\cdots i_n}}\ . \tag{8}$$

ただし、$[x]_a^b$の記号は、$x \leq a$ならばaを、$a < x < b$ならばxを、$b \leq x$ならばbを表す。

問題P_Mの各層における制約量$\{\Phi_{i_k\cdots i_n},\ (i_k,\cdots,i_n) \in S_k,\ k = 2,\cdots,n\}$及び$M$と最適ラグランジュ乗数との間には単調な関係が存在するが、以下では、その一例として、Mとλとの関係だけを述べる。

補　題 1　問題P_Mの総量コスト制約Mと最適なラグランジュ乗数λとの間に、次のような関係が成り立つ。

(i)　$\lambda \to \infty$とすれば、定理1の条件を満たす最適解は$\varphi = \{0,\cdots,0\}$である。すなわち、このλには総量制約$M = 0$が対応する。

(ii)　総量コスト制約だけが異なる2つの問題(P_{M_1}), (P_{M_2})の最適ラグランジュ乗数がそれぞれ$\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$であるとする。このとき、$M_1 > M_2$ならば$\lambda_1 < \lambda_2$であり、逆もまた成り立つ。

(iii)　問題P_Mの最適ラグランジュ乗数を$\lambda^* = 0$、最適解をφ^*であるとする。このとき、最適解のコスト総量を$C = \sum_{i_1,\cdots,i_n} c_{i_1\cdots i_n}\varphi^*(i_1,\cdots,i_n)$で表すと、$C \leq M'$なる任意の制約量$M'$をもつ問題$P_{M'}$の最適解及び最適ラグランジュ乗数は、依然として$\varphi^*$及び$\lambda^* = 0$である。

4．解法アルゴリズム

上述した必要十分条件及びコスト制約とラグランジュ乗数との単調な関係を利用して、最適解を求める数値解法アルゴリズムが提案できる。

(1) 勾配完結法

この解法は、必要十分条件の(5)~(7)以外の条件を満足する実行可能解の列を生成し、最終的には(5)~(7)式を満足するように解を収束させる解法である。実際、この解法により常に目的関数が増大するように解の列を生成することができ、その収束性が証明できる。

(2) 総量完結法

この解法は補題1で述べたコスト制約量と最適ラグランジュ乗数との単調な関係を利用して、ラグランジュ乗数$\lambda, \nu_{i_k\cdots i_n}$を変化させながら、対応する最適解を(8)式により求めてゆき、最終的に所要の制約量M及び$\Phi_{i_k\cdots i_n}$を満足させようとするものである。プログラム構造としては、ラグランジュ乗数の調整を2分探索法で行うための階層構造をもつ。

5．数値例

実施した数値実験では、提案した解法は、勾配射影法や乗数法といったよく知られた非線形計画法以上の高速性を示した。それらの結果については、発表会の当日紹介する。

参考文献

[1] 宝崎, 飯田, 日本OR学会1998年度秋季研究発表会アブストラクト集, pp.110-111, 1998.

[2] Ibaraki and Katoh, *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches*, The MIT Press, 1988.

[3] 今野, 山下, 非線形計画法, 日科技連（ORライブラリー６）, 1984.