1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

弱有効解集合上での凸関数最小化問題に対する内部近似法/分枝限定法

02701684 大阪大学 山田 修司 YAMADA Syuuji
申 請 中 大阪大学 *西村 英二 NISHIMURA Eiji
01307844 大阪大学 谷野 哲三 TANINO Tetsuzo
01009544 大阪大学 乾口 雅弘 INUIGUCHI Masahiro

1 弱有効解集合上での凸関数最小化

本研究では次のような多目的計画問題を考える．

$$(P)\begin{cases}\text{maximize} & \langle c^i,x\rangle,\quad i=1,\dots,k\\ \text{subject to} & x\in X\subset R^n\end{cases}$$

ここで，$c^i\in R^n$, $c^i\neq 0$ であり，制約集合 X は $X=\{x\in R^n: p_j(x)\leqq 0,\ j=1,\dots,m\}$ で表現される．ただし，$p_j:R^n\to R\ (j=1,\dots,m)$ は微分可能な凸関数であり，$p_j(0)<0$ であるとする．さらに次を仮定する．

- $C=\{x\in R^n:\langle c^i,x\rangle\leqq 0,\ i=1,\dots,k\}$
- $\mathrm{int}\, C\neq\varnothing$

多目的計画問題 (P) において弱有効解とは

$$\nexists y\in X\quad \text{such that}\ \langle c^i,x\rangle<\langle c^i,y\rangle\quad {}^{\forall}i\in\{1,\dots,k\}$$

を満たす $x\in X$ である (Sawaragi, Nakayama and Tanino[3])．また仮定より，$\mathrm{int}\,X\neq\varnothing$, $\mathrm{int}\,C\neq\varnothing$ であるので問題 (P) の弱有効解集合は $X_e=X\backslash\mathrm{int}(X+C)$ と表すことができる．

本研究では，この弱有効解集合 X_e 上での凸関数最小化問題に対する逐次解法を提案する．

$$(OES)\begin{cases}\text{minimize} & f(x)\\ \text{subject to} & x\in X_e\end{cases}$$

ここで，目的関数 $f:R^n\to R$ に次の仮定をおく．

- f は微分可能な凸関数
- $\arg\min\{f(x):x\in R^n\}=\{0\}$

問題 (OES) は次の関数

$$\delta(x|X)=\begin{cases}0 & (x\in X\text{ のとき})\\ +\infty & (x\notin X\text{ のとき})\end{cases}$$

を用いることによって，

$$(MP)\begin{cases}\text{minimize} & g(x)=f(x)+\delta(x|X)\\ \text{subject to} & x\in R^n\backslash\mathrm{int}(X+C)\end{cases}$$

と表すことができる．また問題 (MP) に対する双対問題は次のように表される．

$$(DP)\begin{cases}\text{maximize} & g^H(x)\\ \text{subject to} & x\in(X+C)^\circ\end{cases}$$

ここで，制約集合 $(X+C)^\circ$ は次で定義される $(X+C)$ の極集合を表す．

$$(X+C)^\circ=\{y\in R^n:\langle x,y\rangle\leqq 1,\ {}^{\forall}x\in X+C\}.$$

また，目的関数 $g^H:R^n\to R$ は次で定義される問題 (MP) の目的関数 g の準共役関数を表す．

$$g^H(x)=\begin{cases}-\sup\{g(u):u\in R^n\} & (x=0\text{ のとき})\\ -\inf\{g(u):\langle x,u\rangle\geqq 1\} & (x\neq 0\text{ のとき}).\end{cases}$$

上で定義された問題 (MP) と問題 (DP) に対して，$\inf(MP)$ を問題 (MP) の最適値，$\sup(DP)$ を問題 (DP) の最適値とすると $\inf(MP)=-\sup(DP)$ となる (Konno, Thach and Tuy[2], Thach, Konno and Yokota[4])．

2 分枝限定法とペナルティー関数法を用いた内部近似法

2.1 アルゴリズム

Algorithm

$s\geqq 2$, $s\in N$, $\mu>0$ および $1<B<2$ が与えられているものとする．

Initialization

$X\subset M_0$ を満たす矩形 M_0 と，$S_1\subset X$ かつ $0\in\mathrm{int}\,S_1$ を満たす凸多面体 S_1 を生成する．また，初期パーティションを $\mathcal{M}_0=\{M_0\}$ とし，$t(M_0)=0$ とする．

$k\leftarrow 1$ として，Step 1 へ行く．ただし，$V((S_0+C)^\circ)=\{0\}$ とする．ここで，$V((S_0+C)^\circ)$ は凸多面体 $(S_0+C)^\circ$ の頂点集合を表す．

Step 1

次の問題 (P_k) と問題 (P_k) に対する双対問題 (D_k) を考える．

$$(P_k)\begin{cases}\text{minimize} & g(x)=f(x)+\delta(x|X)\\ \text{subject to} & x\in R^n\backslash\mathrm{int}(S_k+C)\end{cases}$$

$$(D_k)\begin{cases}\text{maximize} & g^H(x)\\ \text{subject to} & x\in(S_k+C)^\circ\end{cases}$$

1-1 空でない集合 $\mathcal{P}_k\subset\mathcal{M}_{k-1}$ を選び，$\mathcal{P}_k$ の全てのパーティションの要素 $M\in\mathcal{P}_k$ を分割する．ただし，$\mathcal{P}_k$ は

$$\mathcal{P}_k\cap\{M:\beta(M)=\beta_{k-1},\ M\in\mathcal{M}_{k-1}\}\neq\varnothing \tag{1}$$

を満たしているものとする．ここで，$\beta(M)$ はパーティション $\mathcal{M}_{k-1}$の各要素における下限値であり，β_kは式 (3) で定義される．また，分割によって生成されたパーティションを $\mathcal{P}'_k = \{M'\}$ とし，$t(M') = t(M) + 1$ とする．

1-2 $M \subset S_k + C$ となる $M \in \mathcal{P}'_k$を消去し，残った集合を $\mathcal{M}'_k$とする．

1-3 全ての $M \in \mathcal{M}'_k$に対して下限$\beta(M)$ を求める．ここで，下限値の算出には次の関数

$$F_{\mu_M}(x) = f(x) + \mu_M \sum_{j=1}^{m}[\max\{0, p_j(x)\}]^s \quad (2)$$
$$\mu_M = \mu B^{t(M)}$$

を用いる．(算出法は 2.3 節で述べる．)

1-4 $\mathcal{M}_k = (\mathcal{M}_{k-1}\backslash\mathcal{P}_k) \cup \mathcal{M}'_k$として

$$\beta_k = \min\{\beta(M) : M \in \mathcal{M}_k\} \quad (3)$$

とする．ここで，$\beta(M) = \beta_k$を満たすパーティション $\mathcal{M}_k$の要素 M を M_kとする．さらに，次を満たす $(S_k + C)^\circ$の頂点を v^kとする．

$$M_k \cap \{x : \langle v, x\rangle \geqq 1,\ v \in V((S_k + C)^\circ)\} \neq \varnothing.$$

また，暫定解 x^kを次のように定める．

$$x^k \in \arg\min\left\{F_{\mu_{M_k}}(x) : x \in V(M_k),\ \langle v^k, x\rangle \geqq 1\right\}.$$

ここで，$V(M_k)$ はパーティションの要素 M_kの頂点集合である．さらに $\alpha_k = F_{\mu_{M_k}}(x^k)$ とする．

Step 2

2-1 v^kに対する次の制約無し凸最小化問題を解き，最適解を z^k，最適値をω_kとする．

$$\begin{cases} \text{minimize} & \phi(x : v^k) = \max\{p(x), -\langle v^k, x\rangle + 1\} \\ \text{subject to} & x \in R^n \end{cases}$$

2-2 $\omega_k = 0$ を満たさない場合，$S_{k+1} = \mathrm{co}\ (S_k \cup \{z^k\})$，$k \leftarrow k+1$ として，Step 1 へ戻る．

$\omega_k = 0$ を満たし，次の条件

$$\sum_{j=1}^{m}[\max\{0, p_j(x^k)\}]^s = 0, \qquad \alpha_k = \beta_k$$

を全て満たすならばアルゴリズムは停止し，v^kは問題 (DP) の最適解，x^kは問題 (MP) の最適解となる．

上の条件のいずれかを満たさない場合，$S_{k+1} = S_k$，$k \leftarrow k+1$ として，Step 1 へ戻る．

2.2 パーティションの構築方法

Algorithm におけるパーティションの要素 M は全て矩形であり，次のように表される．

$$M = \{x : a \leqq x \leqq b,\ a < b,\ a, b \in R^n\}.$$

また，パーティションの要素 M の直径の中点を $w = (a+b)/2$ とする．Step 1-2 におけるパーティションの構築には M の面に平行で w を通る $(n-1)$ の超平面を用いることによって M は 2^nの要素に分割することができる (Konno, Thach and Tuy[1])．

2.3 下限$\beta(M)$の算出法

任意の反復 k において，パーティションの各要素における下限$\beta(M)$ は次の関係を満たさなければならない．

$$\beta(M) \leqq \inf\{F_{\mu_M}(x) : x \in (M \cap D)\} \quad (4)$$
$$D = \{x : x \in R^n\backslash\mathrm{int}(S_k + C)\}.$$

まず，パーティションの各要素 M に対して $x^k(M) \in V(M)$ とする．

関数 $F_{\mu_M}(x)$ は微分可能であり，下限$\beta(M)$ を

$$\beta(M) = F_{\mu_M}\left(x^k(M)\right) - \left\|\nabla F_{\mu_M}\left(x^k(M)\right)\right\| \cdot \Delta(M)$$

とする．ただし，$\nabla F_{\mu_M}(x^k(M))$は関数 $F_{\mu_M}(x)$ の $x^k(M)$ における勾配ベクトルであり，$\Delta(M)$ はパーティション M の最も長い辺の長さであるとする．ここで，関数 $F_{\mu_M}(x)$ は凸関数であるので，$F_{\mu_M}(x) \geqq \beta(M), x \in M$ が成立し，式 (4) を満たしている．

2.4 Algorithmの停止基準

Algorithm の停止基準の妥当性を示す．Algorithm の停止基準は次の $(i) \sim (iii)$ である．

$(i) \qquad \omega_k = 0$

$(ii) \qquad \displaystyle\sum_{j=1}^{t}[\max\{0, p_j(x^k)\}]^s = 0$

$(iii) \qquad \alpha_k = \beta_k$

x^kが停止基準を満たすならば，問題 (MP) の最適解が得られていることを示す．

Lemma 2.1. 任意の反復 k において

$$X_e \subset \bigcup_{M \in \mathcal{M}_k} M$$

が成立する．

Theorem 2.1. Algorithm の反復 k において x^kが停止基準 $(i) \sim (iii)$ を満たすならば，x^kは問題 (MP) の最適解である．

参考文献

[1] Horst, R. and H. Tuy, *Global Optimization*, Springer-Verlag, Berlin (1990).

[2] Konno, H., P.T. Thach and H. Tuy, *Optimization on Low Rank Nonconvex Structures* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1997).

[3] Sawaragi, Y., H. Nakayama and T. Tanino, *Theory of Multiobjective Optimization*, Academic Press, Orland (1985).

[4] Thach, P.T., H.Konno and D.Yokota, "Dual approach to minimization on the set of Pareto-optimal solutions", *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol.88 (1996), pp. 689–707.