時系列的ﾃﾞｰﾀが存する際の直感の科学としての準静的予測手法に関しての一考察

01207006　ﾊｲﾌﾞﾘｯﾄﾞ総合研究所　＊　住原　清秀　SUMIHARA Kiyohide

Chaos 理論、確率微分方程式に基づいて将来予測を行使する方法論は様々存在するが、本論においては時系列的ﾃﾞｰﾀが存して、次あるいは次の次のﾃﾞｰﾀの傾向が如何なるかを予測する手法について考察する。精神の発現としての数学を用いて将来が理るということではないが、単に直感に頼ると言っても、どのようなものか、ここに一例として直感の科学の考え方を呈示するものである。

1.予測手法の数学的理論付け

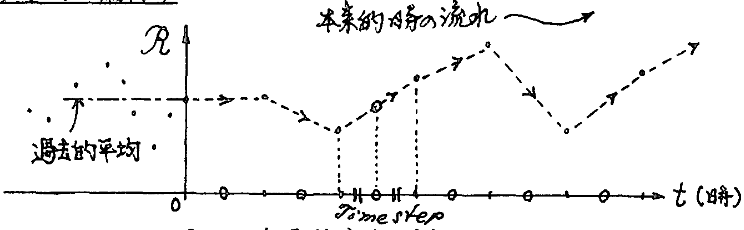

fig.1 時系列ﾃﾞｰﾀの例

Taylor 展開を t =0 を中心として用いる手法で、ここではまず time step の両端 t=t、t+Δt or t + τ のﾃﾞｰﾀと、その平均傾斜（勾配）を time step の中点での傾き（微分係数）とする場合を考えると

$$\mathcal{R}(t) = \sum_{i=0}^{N} a_i t^i = \sum_{i=0}^{N} a_i (n\Delta t)^i \equiv \mathcal{R}_n \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \bar{n}-1) \tag{1}$$

ここに $\bar{n}$ はﾃﾞｰﾀ数である。又、

$$\frac{\mathcal{R}_{n+1} - \mathcal{R}_n}{\Delta t} \simeq \sum_{i=1}^{N} i \cdot a_i \left(n\Delta t + \frac{1}{2}\Delta t\right)^{i-1} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots\cdots, \bar{n}-2) \tag{2}$$

となる。つまり、適宜ﾃﾞｰﾀを用いて上記を満たすごとく a_i を決定すればよいことになる。$\bar{n}=3$ のとき τ 依存性が出てくるが、$\bar{n}=4$ のとき最も簡単に τ 依存性が消えて

$$\mathcal{R}^*_{\text{♂}} = \mathcal{R}_0 - 3\mathcal{R}_1 + 3\mathcal{R}_2 \equiv X - 3Y + 3Z \tag{3}$$

を得る。

ところが、傾斜の平均化 $J \equiv \sum_{i=0}^{M} \frac{\mathcal{R}_{i+1} - \mathcal{R}_i}{\Delta t}$ を用いて $\frac{\mathcal{R}^* - \mathcal{R}_0}{\tau} = \frac{\mathcal{R}(3\tau) - \mathcal{R}_0}{3\tau}$ とすると、

$$\mathcal{R}^*_{\text{♀}} = \mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 \equiv X - Y + Z \tag{4}$$

となるが、安定化装置としての急激変化の防止、予防的意味を持つと考えられる。実際上、適用してみて解ることは、♀ 的では平均衡的時系列ﾃﾞｰﾀに望ましく、♂ 的では少々不均衡的なﾃﾞｰﾀに望ましくなっている。そこで、合成することによって、

$$\mathcal{R}^*_{\text{♀♂}} = X - Y + Z - 2f^*(Y - Z) \quad ; \quad f^* = 0, \text{♀的} \; ; f^* = 1, \text{♂的} \tag{5}$$

なる予測手法が考えられる。ここに、f^* は通常 $0 \leqq f^* \leqq 1$ であり、人間の随意による。

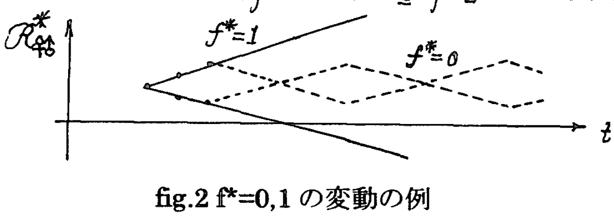

fig.2 f*=0,1 の変動の例

2.準静的数列形式と直感の科学としてのその意味

実際上は 5 式は数列の形をとっていて、

$$x_{i+3} = x_i - x_{i+1} + x_{i+2} - 2f^*(x_{i+1} - x_{i+2}) \tag{6}$$

と書き換えられ、さらに、変動幅 $A_i \equiv x_{i+1} - x_i$ とすると、

$$\mathcal{A}_{i+2}-2f^{*}\mathcal{A}_{i+1}+\mathcal{A}_{i}=0 \tag{7}$$

となる。これをさらに、

$$\begin{cases} \mathcal{B}_{i+1}=\mathcal{B}_{i}+\dot{\mathcal{B}}\tau=-\mathcal{A}_{i}+2f^{*}\mathcal{B}_{i} \\ \mathcal{A}_{i+1}=\mathcal{A}_{i}+\dot{\mathcal{A}}\tau=\mathcal{B}_{i} \end{cases} \tag{8}$$

と書き直すと、

$$\begin{cases} \mathcal{B}=\{-\mathcal{A}_{i}+(2f^{*}-1)\mathcal{B}_{i}\}(\log\tau-\log 0)+\mathcal{B}_{i} \\ \mathcal{A}=\{\mathcal{B}_{i}-\mathcal{A}_{i}\}(\log\tau-\log 0)+\mathcal{A}_{i} \end{cases} \tag{9}$$

となって、**ref.1** の意味で通常 **chaos** 的であり、又、**chaos** 的を表現しているとも言える。
Eq.7 の一般解は、**f*** 一定とするとき、次式で与えられる。(**f*** は一般には変化系である。)

$$\mathcal{A}_{n}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n}{}_{n}C_{k}\,f^{*\,n-k}\left(\sqrt{1-f^{*2}}\right)^{k-1}\left(1-(-1)^{k}\right)i^{k-1}\right\}\mathcal{A}_{1}+\frac{1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}C_{k}\,f^{*\,n-1-k} \tag{10}$$

$$\cdot\left(\sqrt{1-f^{*2}}\right)^{k-1}\left((-1)^{k}-1\right)i^{k-1}\right\}\mathcal{A}_{0},\ (f^{*}\neq 1),\quad \mathcal{A}_{n}=n(\mathcal{A}_{1}-\mathcal{A}_{0})+\mathcal{A}_{0},\ (f^{*}=1) \tag{11}$$

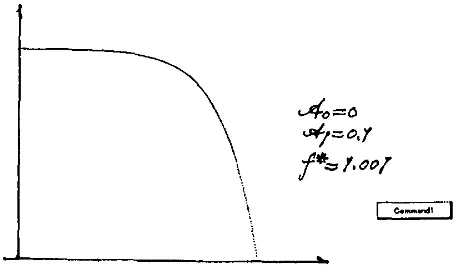

fig.3 f*=1.001 の場合の Ai 変化

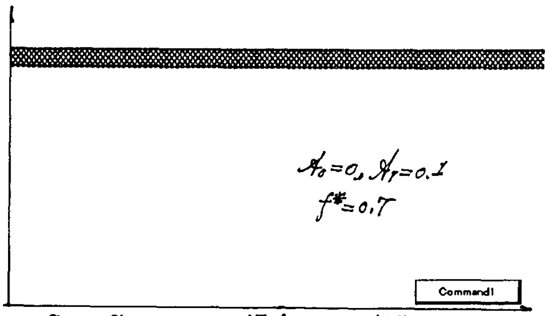

fig.4 f*= 0.7 の場合の Ai 変化

Eq.7 を $(\Delta t)^2$ で割って、変形し連続化すると、

$$\varepsilon^{2}\frac{d^{2}\mathcal{A}}{dt^{2}}+2(1-f^{*})\mathcal{A}=0 \quad ; \quad f^{*}\neq 1 \tag{12}$$

となるが、これは、単純調和振動を示しており、 $\varepsilon\to 0$ の時の挙動性質は **ref.2** に記述されていた。即ち、強極小、弱極小の概念のもとに、**eq.7** の離散系と **eq.12** の連続系では帆を張ったﾖｯﾄとｵｰﾙで漕ぐﾖｯﾄに喩えられるのである。詳細については、**ref.2** を参照されたし。
又、自然調和振動に外力が働く時

$$\frac{d^{2}\mathcal{A}}{dt^{2}}+\omega^{2}\mathcal{A}=f(t) \tag{13}$$

であるが、外力が働いていないという意味でも、本論では準静的な場合を考えている。
特に、**f*=0** の時、

$$\mathcal{A}_{i+2}=-\mathcal{A}_{i} \quad ; \quad \mathcal{A}_{2N}=(-1)^{N}\mathcal{A}_{0}\ ,\ \mathcal{A}_{2N+1}=(-1)^{N}\mathcal{A}_{1} \tag{14}$$

ゆえに、

$$x_{2N+1}=\sum_{n=0}^{N}(-1)^{n}\mathcal{A}_{0}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\mathcal{A}_{1}+x_{0}=\mathcal{A}_{0}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n}(\mathcal{A}_{0}-\mathcal{A}_{1})+x_{0} \tag{15}$$

$$x_{2N}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^{n}\mathcal{A}_{0}+\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\mathcal{A}_{1}+x_{0}=\mathcal{A}_{0}+\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n}(\mathcal{A}_{0}-\mathcal{A}_{1})-(-1)^{N}\mathcal{A}_{1}+x_{0} \tag{16}$$

ここに、 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}=\frac{1}{2},\ \lim_{N\to\infty}x_{2N+1}=\lim_{N\to\infty}x_{2N}=\frac{1}{2}(x_{0}+x_{2})\ ;\ \lim_{n\to\infty}(-1)^{n}=0$

であって、直感の科学の立場からは、和の精神を重んじた♀的と本論を通じて考えられるのである。**f*<0** の時は不安定は起こさぬが、**f*>1** の時 **fig.3** のように不安定性を生ずる点からも、実際上は、**f*;(0,1)** を選択する必要があるが、ある事象の中味の経験等をもって判断されるべきであり、より数学的には統計手法を加味する等の発展が考えられる。
最後に、本研究中、４式は偶然、間違い的から導出されたことを付記する。

参考文献：１．住原　清秀、非線型常微分方程式の数値解析的 **Chaos** 挙動に関する一考察、
応用力学連合講演会講演集　１.**1996**

2. 鷲津　久一郎、池川　昌弘；有限要素法　岩波書店、**1987**