

有限な凸領域における流動量分布

02004370 筑波大学 社会工学研究科 *大津 晶 OHTSU Shou
 01102840 筑波大学 社会工学系 腰塚武志 KOSHIZUKA Takeshi

1 はじめに

筆者はこれまで、領域が円の場合に限って理論流動量分布を導出し、距離分布との関係などについて述べてきた [1]。本稿では、領域を凸領域に拡張した場合の領域内の流動量分布について、理論的な導出方法とその性質について述べる。また実際の流動量分布については数値計算の結果を示す。

2 一様な直線を用いた流動量の計算

2.1 流動量分布の定式化

領域 D が凸であれば、図 1 のように領域をよぎる直線 L 上で流動量をはかることができる [2]。

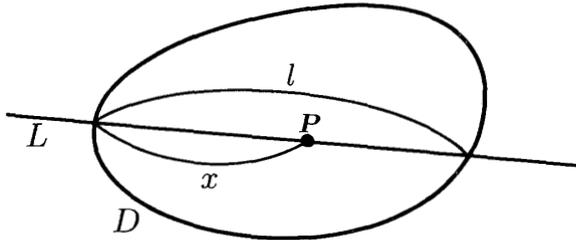


図 1 凸領域をよぎる直線

L が領域に切り取られる部分の長さを l 、一方の交点からの距離を x とすれば、直線上の流動量 $f_L(P)$ は以下のように書くことができる。

$$f_L(P) = 2lx(l-x). \quad (1)$$

地点 P における流動量 $f(P)$ は、一様な直線の集合 dG のうち P を通過する直線について調べて、

$$\begin{aligned} f(P) &= \int_{P \cap L \neq \emptyset} f_L(P) dG \\ &= \int_{P \cap L \neq \emptyset} 2lx(l-x) dG \end{aligned} \quad (2)$$

のように記述できる [1]。

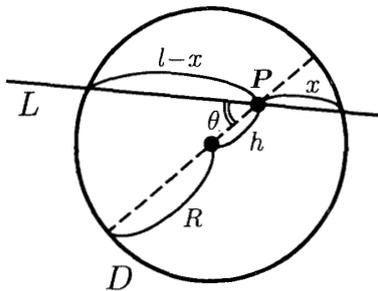


図 2 領域が円の場合

さらに図 2 のように領域が円であれば、

$$lx(l-x) = (R^2 - h^2)\sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta}$$

が成り立つので理論流動量分布 $f(P)$ は明示的な計算が可能になり、第 2 種完全楕円積分 E を用いて、

$$\begin{aligned} f(P) &= 2(R^2 - h^2) \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - h^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= 8R(R^2 - h^2) E\left(\frac{h}{R}\right) \end{aligned} \quad (3)$$

となる。

直線上の流動量は領域が凸であれば常に定義できるが、一般の凸図形に対して領域をよぎる長さ l を簡潔な関数として与えることができないため、実際の流動量を算出するときには後に述べるような数値計算をする必要がある。

2.2 領域内総流動量について

これまでの定義を用いて、

$$\int_{P \in D} f(P) dP = \int_{P \in D} \left(\int_{P \in L} f_L(P) dG \right) dP \quad (4)$$

と記述される領域内の総流動量(あらゆる地点の流動量の総和)は以下のように書き直すことができる。

$$\int_{L \cap D \neq \emptyset} \left(\int_{P \in L} f_L(P) dP \right) dG. \quad (5)$$

式 (5) の括弧内の積分は往復に考慮しなければ、

$$\int_0^l lx(l-x) dx = \frac{l^4}{6} \quad (6)$$

となるが、領域内の任意の 2 点 P_1, P_2 の距離を r とすると、文献 [2] の crofton の第 3 定理により、

$$\int \frac{l^4}{6} dG = \int r dP_1 dP_2 \quad (7)$$

となり、右辺は領域内の 2 点間の距離の総和を表す量になっている。

試しに領域が半径 R の円の場合に左辺を計算すると、

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(2\sqrt{R^2 - u^2})^4}{6} du d\theta \\ &= \frac{32\pi}{6} \int_0^R (R^2 - u^2)^2 du \end{aligned}$$

$$= \frac{128R}{45\pi} \cdot (\pi R^2)^2 \quad (8)$$

となり、確かによく知られた円内の2点間の距離の総和に等しくなっている。

3 流動用分布の数値計算例

いくつかの凸図形を例とし、前述の一般的な直線を用いた計算方法によって領域内の流動量分を計算してみる。その際、数値計算の都合上凸多角形を対象とするが、頂点数 n に対して高々 $2n$ の場合分け計算が必要になる。

また、蛇足ではあるが多角形でなくとも原理的には計算可能であることを付記しておく。

正方形と正八角形の場合の領域内流動量を図3、図4に示す。

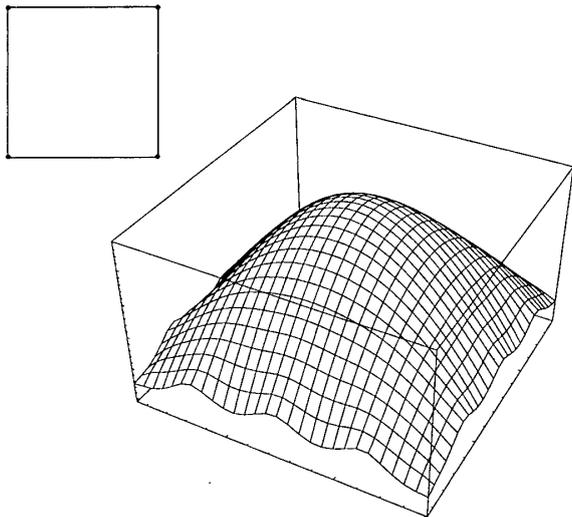


図3 流動量分布 正方形の場合

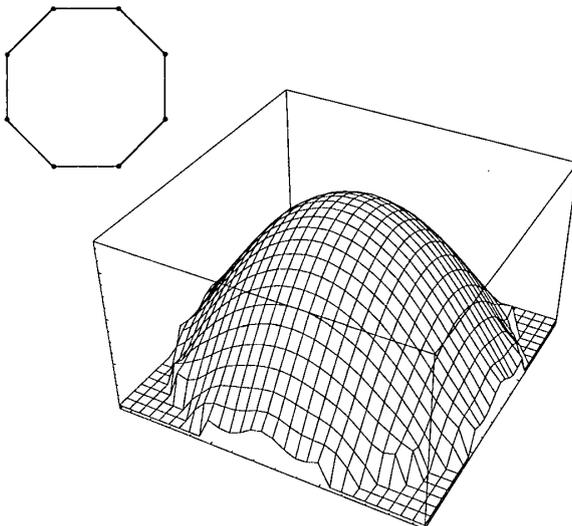


図4 流動量分布 正八角形の場合

比較のため円の場合の流動量分布も図5に示す。図3、図4を見ると頂点の存在が流動量に若干影響している

が、正八角形ぐらいになると円の場合の分布にかなり近づくことがわかる。

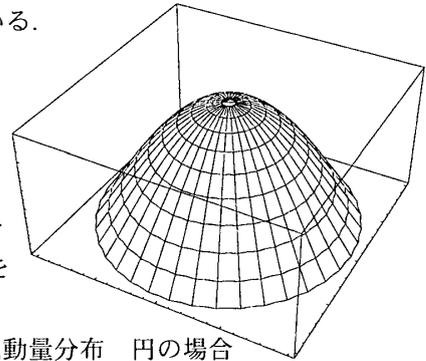


図5 流動量分布 円の場合

さらに一般の凸多角形の場合の流動量分布を図6に示す。

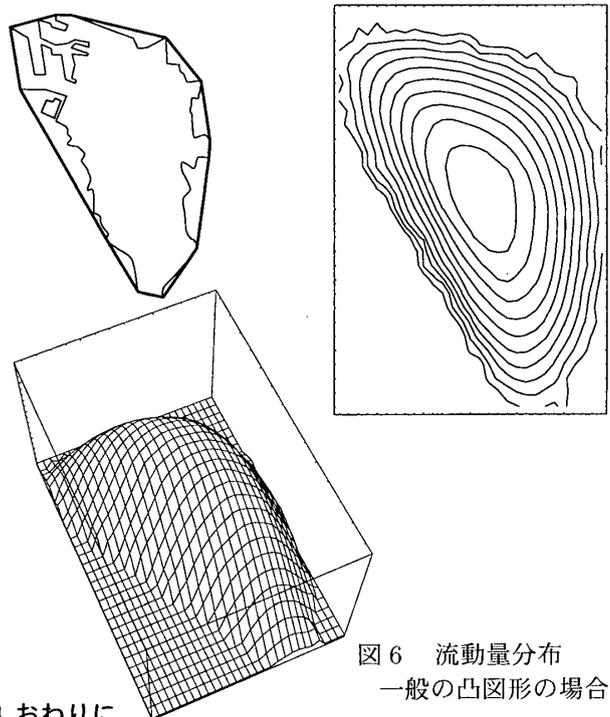


図6 流動量分布 一般の凸図形の場合

4 おわりに

流動量分を表す各図を見ると、いずれの場合も流動量の最大値は図形の幾何学的中心付近で唯一の最大値を取り、その分布が単峰になることに気付く。このことは凸領域内の流動量分布が領域の外形に大きく依存せずに安定していることを示すものである。この単峰性の証明は紙面の都合上割愛する。

以上の結果をふまえて、“流動量が最大になる点”という新たな図形の中心を定義したい。この点の持つ意味は、最も多くの移動にさらされる点であることから最も公共性の高い点であるといえるし、他にもいくつかの解釈が可能のように思われる。今後考察を深めたい。

参考文献

- [1] 大津 晶, 腰塚武志 (1998): 都市内流動量分布に関する基礎的研究. 日本都市計画学会学術研究論文集第33号, 日本都市計画学会, pp.319-324
- [2] 腰塚武志 (1976), 積分幾何学について (3): オペレーションズ・リサーチ, Vol.21, No.11, pp.654-659.