1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

2ノード待ち行列ネットワークの定常分布の裾の解析

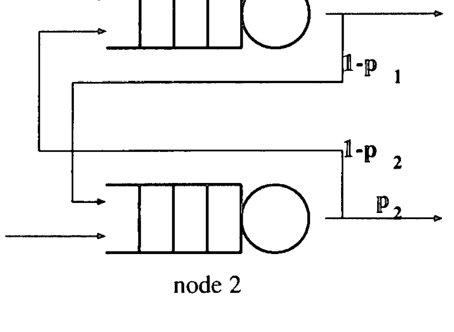
02102690 東京工業大学 *加藤 憲一 KATOU Ken'ichi
01605320 筑波大学 牧本 直樹 MAKIMOTO Naoki

1. はじめに

待ち行列ネットワークにおいて待ち行列長の定常分布の直接的な解析は難しいことが多い．そのため，ネットワーク内のあるノードの人数の周辺定常分布が指数的に減少することを利用して分布の裾の減衰率を求める研究がATMネットワークにおける微小セル損失率の推定との関連で，近年注目されている．Chang [1] はインツリーネットワークに対して，ノードを上流から解析することによって，任意のノードの減衰率を求めた．しかし，ノード間の推移がフィードバックなどを含む一般のネットワークに対しては，ノード間の挙動の依存性から解析は難しくなる．本研究では2ノードからなる待ち行列ネットワークに対して，それぞれのノードの系内人数の周辺定常分布の減衰率の上界を与える漸化式を提案する．この上界は各ノードへの系外からの到着とサービス分布のラプラスースチィルチェス変換 (Laplace Stieltjes transform, LST) の方程式を解くことによって得られる．この方法はジャクソン型ネットワークの場合には厳密な減衰率を与える．

2. 2ノード待ち行列ネットワーク

以下の図の様な2つのノード 1, 2 からなる待ち行列ネットワークを考える．各ノードへの到着はそれぞれ独立にマルコフ到着過程 (Markovian arrival process, MAP) に従い，サービス時間分布は相型分布 (PH) に従うものとする．ノード $i(=1,2)$ でサービスを終えた客は，確率 p_i で系外へ去り，$1-p_i$ で他方のノードへ推移するものとする．



ノード1への系外からの到着間隔を $\{T_n; n=1,2,\cdots\}$ とする．このとき

$$\phi(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log E[e^{-s(T_1+\cdots+T_n)}]$$

として，$f_1(s) = \exp(\phi(s))$ をノード1の系外からの到着の漸近ラプラス-スチルチェス変換 (asymptotic LST, ALST) と呼ぶことにする．同様にしてノード2への系外からの到着の ALST を $f_2(s)$，ノード i のサービス時間分布の LST を $g_i(s), i=1,2$ とする．

ノード i の時刻 t での系内人数を $N_i(t)$，到着 MAP の状態をそれぞれ $I_i(t)$，サービス PH の状態を $J_i(t)$ とおくと，このモデルは無限次元ベクトル $Q(t) = \{(N_i(t), I_i(t), J_i(t), i=1,2)\}$ によって記述される連続時間マルコフ連鎖となる．このマルコフ連鎖をノード2の人数でブロック化すると推移速度行列 $\boldsymbol{Q}$ は以下のようなブロック3重対角行列の準出生死滅過程となる．

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{Q}}_1 & \dot{\boldsymbol{Q}}_0 & & \\ \dot{\boldsymbol{Q}}_2 & \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{Q}_0 & \\ & \boldsymbol{Q}_2 & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \end{pmatrix}$$

ここで $\boldsymbol{Q}$ 内の各行列はそれぞれノード2の人数でブロック化したときの推移速度を表す無限次元行列である．

ここでシステムは安定であると仮定する，つまり平衡方程式 $\boldsymbol{\pi Q} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{\pi e}^\top = 1$ を満たす定常ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ が一意に存在するものと仮定する．

ノード i の人数の周辺定常分布を $q_i(n)$ とする．

$$\log(r_i) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_i(n)$$

が存在するとき $r_i \in (0,1)$ をノード i の周辺定常分布の減衰率と呼ぶことにする．

3. 周辺定常分布の減衰率の上界

ここで，$\eta < 1$ が $q_1(\cdot)$ の減衰率の上界の一つとして与えられたときに $q_2(\cdot)$ の減衰率がどのような値になるかを考える．

エルゴード的準出生死滅過程に対して，定常ベクトルをノード2の系内人数によってブロック化 $\boldsymbol{\pi} = (\boldsymbol{p}(0) \quad \boldsymbol{p}(1) \quad \boldsymbol{p}(2) \quad \cdots)$ すると，非負無限次元行列 $\boldsymbol{R}$ が存在して，

$$\boldsymbol{p}(n_2) = \boldsymbol{p}(1)\boldsymbol{R}^{n_2-1}, \qquad n_2 = 2, 3, \cdots$$

が成り立つことが知られている．また，ノード2の系内人数定常分布の減衰率上界に関して以下のことが示されている．

命題 1 [2] 定数 $\tau > 0, M < \infty$ とベクトル $\boldsymbol{\xi} > \boldsymbol{0}$ が

$$\begin{cases} \boldsymbol{\xi}\left(\frac{1}{\tau}\boldsymbol{Q}_0 + \boldsymbol{Q}_1 + \tau\boldsymbol{Q}_2\right) \le \boldsymbol{0}, \\ \boldsymbol{p}(1) \le M\boldsymbol{\xi}, \\ \boldsymbol{\xi e}^\top < \infty \end{cases}$$

を満たすとき $q_2(n) \le M\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{e}^{\top}\tau^{n-1}, \forall n$ が成り立つ. □

従って, 命題1の条件を満たすベクトル $\boldsymbol{\xi}$ の存在性と τ がわかれば, ノード2の周辺定常分布の裾の減衰率が求まる. ここで η が $q_1(\cdot)$ の減衰率の上界の一つであることから, このとき無限次元ベクトル $\boldsymbol{p}(1)$ の各成分もまた指数減衰的な性質を持つことがわかり, 命題1の2段目の関係式をフィードバックを含むモデルに対し拡張することが出来る. 本研究では η に対して $\boldsymbol{\xi}, \tau$ が以下の方程式の解として与えられることを示した.

命題 2 以下の方程式を満たす (x, y, α, β)

$$\begin{cases} f_1(\alpha)g_1(-x)\left(p_1 + \frac{1-p_1}{f_2(\beta)}\right) = 1, & (1) \\ f_2(\beta)g_2(-y)\left(p_2 + \frac{1-p_2}{f_1(\alpha)}\right) = 1, & (2) \\ \alpha + \beta = x + y, & (3) \\ \eta \le f_1(\alpha) < 1, \quad x < 0 \end{cases}$$

が存在するとき, $\tau = f_2(\beta)$ とおくと, $\boldsymbol{\xi}$ が存在して命題1の条件を満たす. □

4. 裾の減衰率の上界を与える漸化式

フィードバックを含むネットワークモデルに対しては, 3節で仮定した $q_1(\cdot)$ の減衰率 η は未知である. そこで, ノードの対称性から, ノード1の減衰率の上界にも命題2を同様に適用することができることを利用して, 自明な減衰率の上界 $\eta = 1$ から出発して, 他方のノード1,2の減衰率の上界を交互に求めていくことによって成分がノード i の減衰率の上界となる数列 $\{\tau_n^{(i)}; n = 0, 1, \cdots\}, i = 1, 2$ を生成する以下の逐次代入を行う.

(STEP1) 十分小さい $\epsilon > 0$ をとり $n = 1$, $\tau_0^{(1)} = 1 - \epsilon, \tau_0^{(2)} = 1 - \epsilon$, とおく

(STEP2) $\tau_n^{(2)} = \inf_{\beta \in \mathcal{E}^2(\tau_{n-1}^{(1)})} \{f_2(\beta)\}$

(STEP3) $\tau_n^{(1)} = \inf_{\alpha \in \mathcal{E}^1(\tau_n^{(2)})} \{f_1(\alpha)\}$

(STEP4) $\tau_n^{(1)} = \tau_{n-1}^{(1)}$ かつ $\tau_n^{(1)} = \tau_{n-1}^{(2)}$ となれば終了, そうでなければ n に1を加え (STEP2) へ

ここで, 集合 $\mathcal{E}^1(\tau), \mathcal{E}^2(\tau)$ は以下で与えられる.

$$\mathcal{E}^1(\tau) = \{\alpha \ : \ \exists(\alpha, \beta, x, y), \quad (1), (2), (3), y < 0, f_2(\beta) \in (\tau, 1)\}$$
$$\mathcal{E}^2(\tau) = \{\beta \ : \ \exists(\alpha, \beta, x, y), \quad (1), (2), (3), x < 0, f_1(\alpha) \in (\tau, 1)\}$$

この逐次代入によって生成される数列 $\{\tau_n^{(i)}\}, i = 1, 2$ は $[0, 1]$ の単調非増加列となる. このとき

仮定 3

$$\frac{1}{f_1^{(1)}(0)} + \frac{1-p_2}{g_2^{(1)}(0)} > \frac{1}{g_1^{(1)}(0)},$$
$$\frac{1}{f_2^{(1)}(0)} + \frac{1-p_1}{g_1^{(1)}(0)} > \frac{1}{g_2^{(1)}(0)}.$$

を仮定する. ここで関数 f の1階微分を $f^{(1)}$ で表すものとする.

$-1/f_i^{(1)}(0)$ はノード i の系外からの平均到着率, $-1/g_i^{(1)}(0)$ はサーバーが稼動しているときのサービス率を表している. 従って, 仮定3の $i(=1, 2)$ 段目の式はフィードバックしてくる客の到着率が他方のノードが常に稼動していると仮定したときのノード i に対する安定性条件を与えている. そのため, 仮定3はシステムが安定であるための十分条件となる.

仮定3のもとでは $\tau^{(i)} < \tau_0^{(i)}, i = 1, 2$ が成り立ち, $\tau^{(i)} = \lim_{n\to\infty} \tau_n^{(i)}, i = 1, 2$ としたときに逐次代入が意味のあるものである, すなわち1未満の減衰率の上界が得られることが示される.

ゆえに系内人数の周辺定常分布に関して

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log q_i(n) \le \log(\tau^{(i)}), \qquad i = 1, 2$$

が成り立ち減衰率の上界 $\tau^{(1)}, \tau^{(2)} (< 1)$ が得られる.

例 ノード i の系外からの到着率 λ_i, サービス率 μ_i のジャクソン型ネットワークを考える. このとき $\tau_1^{(2)}$ はノード1の退去率が μ_1 と仮定したときの減衰率となるので, $\tau_1^{(2)} = ((1-p_1)\mu_1 + \lambda_2)/\mu_2$. 以後同様にして $n = 1, 2 \cdots$ に対して

$$\tau_n^{(2)} = \gamma^n \mu_1 + \frac{(\lambda_2 + (1-p_1)\lambda_1)\sum_{k=0}^{n} \gamma^k}{\mu_2}$$

を得る, ここで $\gamma = (1-p_1)(1-p_2)$ とする. よって $\gamma < 1$ で $\tau^{(2)} = (\lambda_2 + (1-p_1)\lambda_1)/\mu_2(1-\gamma)$ となり漸化式は厳密な減衰率に収束する.

参考文献

[1] C. S. Chang, *Sample path large deviations and intree networks*, Queueing Systems, **20**, pp.7 36, 1995.

[2] N. Makimoto, Y. Takahashi, and K. Fujimoto, *Upper bounds for the geometric decay rate of the stationary distribution in two stage tandem queues*, Research Report on Mathematical and Computing Sciences B 326, Tokyo Institute of Technology, 1997.