1999年度日本オペレーションズ・リサーチ学会
春季研究発表会

連続時間での航空機の座席管理

澤木 勝茂 (南山大学経営学部)

1 はじめに

航空機の座席管理は、航空会社における最も重要な収益管理の柱である。満席ではあるが安い料金を支払う客（多くは団体客であり、割引客と呼ぶ）がほとんどである便と同様に、高い料金を支払った少数の客（普通客と呼ぶ）がいるのみで空席の多い便もまた航空会社にとっては望ましい乗客の利用状況ではない。乗客の望ましい利用状態がその両者の中間にあるならば、安い料金の割引客による早い時期での予約を制限し、遅い時期（場合によっては離陸の直前）にやって来る高い料金を支払う普通客のためにどれだけの空席を事前に確保しておくべきであろうか。このような問題を航空機の座席管理モデルと呼ぶ。

本論文では、連続時間での座席管理モデルをセミ・マルコフ決定過程の枠組の下で定式化し、最適な座席管理政策とその評価関数についての定性的性質について議論する。第2節では、従来の座席管理モデルを概観し、そのモデルの短所と応用上の限界について述べる。第3節では、一期モデルであった従来の座席管理モデルをセミ・マルコフ決定過程として動態化し、最適政策とその評価関数の定性的性質を明らかにする。第4節では、将来の研究方向について言及し論文のまとめを行なう。

2 座席管理モデルにおける仮定と一期間モデル

航空会社における収益管理としての座席管理モデルには2つの課題がある。第1の課題は、割引券および普通券への需要が価格の関数であることに着目して、各種の航空券の価格構成をデザインすることである。2つ目の課題は、航空券の価格を所与として料金クラス毎の座席を決定する問題である。ここでの座席管理モデルは、第2の課題について解答しようとするものである。

航空産業の規制緩和を受けて今まで様々な座席管理モデルが提案されてきたが、これらのモデルの基本になったのはLittlewoodモデル [1972] であり、その要旨は次の通りである。下記の記号を採用しよう。

$X =$ 割引客の需要

$Y =$ 普通客の需要

$\pi_1 =$ 普通料金

$\pi_2 =$ 割引料金，$\pi_1 > \pi_2$

$C =$ 総座席数（全容量）

$I =$ 割引客への販売座席数 $, I \leq C.$

最適な割引客への座席数（上限）は

$$I^* = max\{I|\pi_2 \geq \pi_1 P_r[Y > C - I]\} \tag{1}$$

で与えられる。

仮定 A. (i) X と Y は独立である。

(ii) 割引客の需要は、普通客の需要よりも先に実現する。

3 座席管理モデルの動態化

時刻0を予約の受付開始時点とし、時刻 T を飛行機の離陸時点、連続時間の閉区間 $[0,T]$ を計画期間とする。料金クラスは K 種類からなり、k 番目の料金を π_k とし、$\pi_1 > \pi_2 > \cdots > \pi_K$ とする。予約が到着したときの申込数（予約サイズ）は s とする。但し、$0 \leq s \leq S$ と仮定する。組 $(k,s) \equiv \phi$ とおき、ϕ を予約タイプと呼ぶ。従って、すべての予約タイプは $K \cdot S$ 種類あり、この集合を $M = \{\phi|\phi = (k,s) \in K \bigotimes S\}$ とする。時刻 t_n を n 番目の予約の到着時間とし、確率変数 Φ_n を時刻 t_n での予約タイプとすれば、確率過程 $\{\Phi_n, t_n : n = 1,2,\cdots\}$ はセミ・マルコフ過程であると仮定する。即ち、

$$\begin{aligned} &P_r\{\Phi_{n+1} = \phi', t_{n+1} - t_n \leq v|\Phi_0,\cdots,\Phi_n; t_0, t_1, \cdots, t_n\} \\ &= P_r\{\Phi_{n+1} = \phi', t_{n+1} - t_n \leq v|\Phi_n = \phi, t_n = u\} \\ &\equiv P(\phi', v|\phi, u) \end{aligned} \tag{2}$$

仮定 B. すべての ϕ と u に対して

$$\sum_{\phi' \in M} P(\phi', \delta|\phi, u) \leq 1 - \varepsilon \tag{3}$$

となる $\delta > 0$ と $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ が存在する。

次に、座席管理モデルをセミ・マルコフ決定過程として定式化しよう。予約が到着した時点 t でのシステムの状態は、到着した予約のタイプとその時点で販売可能な座席数（残存座席数と呼び I で表す）である。システムの状態は $(I,\phi,t) \in \{0,1,\cdots,C\} \times M \times (0,T]$ である。このシステムの状態を観察して、予約タイプ $\phi = (k,s)$ による料金クラス k の予約サイズ s を受け付けるか否かの意思決定を行なう。決定（行動）の集合を $A = A(I,\phi)$ とし、例えば、予約サイズが分割可能ならば $A = \{0,1,\cdots,\min(s,I)\}$ であり、受け付けるか否かの2通りならば、$s \leq I$ のとき $A = s, s > I$ のとき $A = 0$ と

なる。座席の販売政策 (単に政策と呼ぶ) を f とすれば、f は $f:(I,\phi,t)\rightarrow A$ で定義される可測関数である。

$v_f(I,\phi,t)$ を時刻 t で、システムの状態が (I,ϕ) で与えられた場合に政策 f によって生成される期待利得とする。$t\leq T$ に対して

$$v^*(I,\phi,t)=\sup_f v_f(I,\phi,t) \tag{4}$$

とし、$v_f=v^*$ ならば f を最適政策と呼ぶ。v^* は次の最適方程式の一意解である。

$$\begin{aligned} & v(I,\phi,t) \\ & =\sup_{a\in A}\{a\cdot\pi+\sum_{\phi'}\int_t^T v(I-a,\phi',\tau)P(\phi',d\tau\mid\phi,t)\} \end{aligned} \tag{5}$$

任意の政策 f に対して

$$v_f(I,\phi,t)\leq\pi_1 C$$

であるから、$v_f(\cdot,\cdot,\cdot)$ は有界な実数値関数である。B を (I,ϕ,t) の上で定義された有界な実数値関数の集合とする。写像 $T^*:B\rightarrow B$ 及び $T:B\rightarrow B$ を次のように定義する。任意の $v\in B$ に対して

$$(T^*v)(I,\phi,t)=\max_a\{a\cdot\pi+v(I-a,\phi,t)\} \tag{6}$$

$$(Tv)(I,\phi,t)=\sum_{\phi'}\int_t^T v(I,\phi',\tau)P(\phi',d\tau\mid\phi,t) \tag{7}$$

(5) 式を (6) 式と (7) 式を用いて表現すれば、

$$v(I,\phi,t)=(T^*Tv)(I,\phi,t) \tag{8}$$

となる。

補助定理 1. 仮定 B の下で次のことが成立する。

(i) T^*T は退少写像である。即ち、

$$\|(T^*T)(u)-(T^*T)v\|\leq(1-\varepsilon)\|u-v\|, u,v\in B$$

(ii) $\lim_{n\rightarrow\infty}(T^*T)^n(0)=v^*$ であり、v^* は (3.4) 式の一意解である。

定理 2. 時刻 t で予約タイプ $\phi=(k,s)$ の客が到着したとする。$v^0=Tv^*$ とおく。

(i) もし、客の予約タイプが分割可能ならば、座席 a^* を販売することは最適である。ここで、a^* は $\{a\cdot\pi_k+v^0(I-a,\phi,t)\}$ を最大にする a の値である。

(ii) もし客の予約タイプが分割不可能ならば、次式が成立するとき現在の予約サイズ s を受け付けることは最適である。

$$v^0(I,\phi,t)-v^0(I-s,\phi,t)\leq s\cdot\pi_k$$

定理 3. 推移確率 $P(\phi',\tau|\phi,t)$ が料金クラス k から独立であるとし、予約タイプ $\phi=(k,s)$ に対する予約受付数を s_k と定義する。$\pi_i>\pi_j$ なる料金クラス i と j に対して $s_i\geq s_j$ が成立する

定理 4. 各々の $\phi=(k,s)$ と t に対して $v^*(I,\phi,t)$ は I の非減少関数である。

定理 5. 各々の I と ϕ に対して $\sum_{\phi'}\int_t^T P(\phi',d\tau\mid\phi,t)$ が t の非増加関数ならば、$v^*(I,\phi,t)$ もまた t の非増加関数である。

4 まとめ

本論文では、従来の1期間座席管理モデルを連続時間での動態的モデルに拡張し、その定式化をセミ・マルコフ決定過程の枠組の中で行なった。ここで得られた知見はセミ・マルコフ過程に従って到着する予約タイプに対して最適政策とその期待利得が存在し、その定性的な性質を明らかにしたことである。特に、定理2では、推移確率が予約タイプの料金クラスに依存しないという条件の下で、より高い料金クラスの予約受付数は、より低い料金クラスの予約受付数よりも大きいことを示した。即ち、予約限度数は料金クラスに関して包含構造 (nested structure) を持つ。

参考文献

[1] Brumelle,S.L., J.I.McGill, T.G.Oum, K.Sawaki and M.W.Tretheway,"Allocation of Airline Seats between Stochastically Dependent Demands," *Transportation Science 24(3)*,1992,pp.183–192.

[2] Brumelle,S.L., J.I.McGill,"Airline seat allocation with multiple nested fare classes," *Operations Research 41 (1)*,1993,pp.127–137.

[3] Denardo,E.V.,"Contraction Mapping in the Theory Underlying Dynamic Programming",*SIAM Review 9(2)*1967,pp.167–177.

[4] Littlewood,K."Forecasting and Control of Passenger Bookings"*AGIFORS Proceedings*, 1972, pp.96–117.

[5] Sawaki,K.,"An Analysis of Airline Seat Allocation",*J.Operations Research Society of Japan, Vol. 32*, 1989, pp.411–419.

[6] Sawaki, K.,"Inventory Control for Price Differentiable Products with No Carrying Over", *Stochastic Modeling in Innovative Manufacturing, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 445,Springer*,1997,pp.309–317.